المپیادهای ریاضی آمریکا

(با حل مسأله‌ها)

ترجمهٔ پرویز شهریاری
ابراهیم عادل

المپیادهای ریاضی

در آمریکا

ترجمهٔ پرویز شهریاری
ابراهیم عادل

U.S.A.
MATHEMATICAL OLYMPIADS,

Compiled and with solutions by
Murray S. Klamkin
University of Alberta

THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

First Printing
© 1988 by the Mathematical Association of America (Inc.)

خیابان دانشگاه، کوچه میترا، شماره ۷

تلفن ۶۴۱۸۸۳۹ ـ ۶۴۶۹۹۶۵

المپیادهای ریاضی آمریکا

موری اس. کلامکین

ترجمه: پرویز شهریاری

چاپ سوم: ۱۳۷۶ ـ تهران

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

چاپ: چاپخانه رامین

همهٔ حقوق محفوظ است.

۴۰۰ تومان

شابک X ـ ۲۲ ـ ۵۵۰۹ ـ ۹۶۴ ISBN 964 - 5509 - 22 - X

فهرست

از پیش‌گفتار مؤلف

این کتـاب را «انجمن ریاضی‌دانان امریـکا» منتشر کرده و شامل نخستین پانزده «المپیاد ریاضی» در ایالات‌متحده‌است که‌ازسال ۱۹۷۲ تا سال ۱۹۸۶ برگزارشده‌اند.

درسال‌های‌دهۀ ۶۰، تلاش‌هایی برای برپایی«المپیاد ریاضی در امریـکا» و شرکت دانش‌آموزان امریـکایی در «المپیاد ریاضی‌جهانی»انجام گرفت، ولی عضوهای«کمیتۀ مسابقه‌های ملی» ازاین‌فکر حمایت نکردند. درسال۱۹۶۸، رئیس «کمیتۀ مسابقه‌هـای ملی»، با آن‌که خـود مخالف برپایی این‌گونه فعالیت‌های تازه بود، کمیته‌ای فرعی، برای بررسی این موضوع تشکیل داد. در سال ۱۹۷۱، وقتی که در «ماهنامۀ ریاضیات در امریکا» (شمارۀ ۷۸، سال ۱۹۸۱)، مقاله‌ای با عنوان «چرا در امریکا، المپیاد ریاضی نداریم؟» منتشر شد، رئیس وقت «کمیتۀ مسابقه‌هـای ملی» دوبـاره «کمیتۀ فرعی المپیاد ریاضی» را تشکیل داد. در آن زمان، من عضو هیات مدیرۀ «انجمن ریاضی‌دانان امریکا» بودم،

بی اطلاع از فعالیت‌هـای اخیر و ناراضی از «مسابقه‌های تستی ریـاضیات درکشـور»، نامه‌ای بـه رئیس انجمـن ریاضی‌دانان آمریکا نوشتم و خواستم، بحث مربوط بـه مسابقه‌های ریاضی، در دستورکار جلسهٔ بعدی هیات‌مدیره (که قرار بود در تابستان سال ۱۹۷۱ در دانشگـاه ایالت پنسیلوانیا برگزار شود)گنجانده شود. درآن‌جلسه، انجمن به‌جای بحث دربارهٔ مسابقه‌ها، مرا بـه‌عنوان عضو «کمیتهٔ ریاضی» و، همچنین، عضو «کمیتهٔ مسابقه‌های ملی»انتخاب کرد. درنخستین جلسه‌ای کـه درسال ۱۹۷۱ داشتیم، رأی بـه‌برگزاری «المپیاد ریاضی در امریکا» دادند (با سه رأی موافق‌و دو رأی مخالف). بعداً، این رأی، به‌تایید «انجمن ریاضی‌دانان امریکا» رسید.

قرار شد، در هر المپیاد، پنج مسألـهٔ تشریحی داده شود تا توان ریاضی شرکت‌کنندگان را تعیین کند؛ زمان حل مساله‌ها، سه ساعت تعیین شد (که بعدها، به‌سه ساعت ونیم تغییریافت). هدف،کشف وتشویق‌آن‌دسته از دانش‌آموزان دبیرستانی بود که در ریاضیات، دارای استعدادی بالا، خلاقیت وقدرت ابتکارند و شایستگی آن‌را دارندکه در زمینهٔ ریاضی‌کارکنند. ازبین‌شرکت‌کنندگان، هشت‌نفر می‌توانستند به‌عنوان عضوهای تیم، در «مسابقه‌های جهانی ریـاضیات» انتخاب شونـد. شرکت در «المپیاد ریـاضی امریکا»، منحصر به ۱۰۰ نفر که از بین دانش‌آموزان ممتاز

دبیرستان‌ها کــه از عهدهٔ «امتحان ریاضی دبیرستان‌هــای امریکا» برآمده بودندو، احتمالاً، چندنفر ازدانش‌آموزان ایالت‌هایی که دراین «امتحان» شرکت‌نکرده بودند، به‌آن‌ها اضافه می‌شد.

ازسال ۱۹۸۳، این وضع تغییر کرد: از کسانی که داوطلب‌باشند، امتحانی به‌عمل‌آید؛ امتحان شامل ۱۵ مساله بود که تنها به پاسخ‌های عددی آن‌ها، نمره داده می‌شد. این مساله‌ها، نسبت به‌مساله‌های تستی «امتحان ریاضیات‌در دبیرستان‌های امریــکا» (و نه نسبت بــه مساله‌های «المپیاد ریاضی آمریکا»)، خلاقیت و قدرت‌ابتکار بیشتری‌می‌طلبید. همهٔ دانش‌آموزان رسمی دبیرستان‌های امریــکا و کانادا، می‌توانند برای این امتحان، ثبت‌نام‌کنند (تعداد آن‌ها، به حدود چهارصدهزار نفر می‌رسد). برای دانش‌آموزانی کــه دست‌کم ۱۰۰ نمره (از ۱۵۰ نمره) را بیاورند، بــرای امتحان مرحلهٔ دوم دعوت‌نامه فرستاده می‌شود. این تعداد قریب پنج‌هزار نفر است. از بین این افراد، ۱۵۰ نفربرای شرکت‌در «المپیاد ریاضی آمریکا» انتخاب می‌شوند. ۲۴ نفر ازبهترین‌ها، برای‌آمادگی در «المپیادجهانی‌ریاضیات» یك‌دورهٔ آموزشی را می‌بینند و، ازمیان آن‌ها، ۶نفر(قبلاً ۸نفر) به «المپیاد جهانی ریاضی» راه می‌یابند.

ضمن تصحیح ورقه‌هــای «المپیاد ریاضی امریکا»، برای راه‌حل‌های ظریف و ابتکاری و یــا تعمیم مستدل و

ارزشمند مساله، نمرهٔ اضافی داده می‌شود. گرچه تعمیم ریاضی نشانهٔ‌خلاقیت است وراه‌حل‌های ظریف وابتکاری، ارضاکننده‌تر و درخشان‌تر از راه‌حل‌های‌عادی است،ولی پیدا کردن‌آن‌ها، معمولاً، وقت زیادی می‌برد، مگر آن‌که داوطلب آگاهی‌های قبلی زیادی داشته باشد و، دراین زمینه، به‌اندازهٔ کافی تمرین‌کرده باشد. با همهٔ این‌ها، باید برای زیبایی راه‌حل‌ها و تعمیم مساله‌ها، ارزش قایل شد، چراکه زیبایی دلیل بردرك واقعی وتعمیم دلیل برخلاقیت است.

□

ادعا نمی‌کنیم، راه‌حل‌هایی که در این کتاب آمده است، بهترین و زیباترین آن‌هاست. بدون‌شك، خوانندهٔ با ذوق می‌تواند دربارهٔ بعضی از آن‌ها، راه‌حل‌های دیگر و یا تکمیل‌ها و تعمیم‌هایی پیدا کند. بسیار سپاس‌گذار خواهیم شد که خوانندهٔ گرامی، ما را در جریان نظرها و ابتکارهای خود قرار دهد.

Murray S. Klamkin
دانشگاه آلبرتا

کتابخانه مجازی ریاضیات

مسأله‌ها

المپیاد اول (نهم ماه مه ۱۹۷۲)

۱. (نظریهٔ عددها.۱). نمادهای

$$(a, b, \dots, g) \text{ و } [a, b, \dots, g]$$

را، به‌ترتیب، به‌معنای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و کوچکترین مضرب‌مشترك عددهای درست و مثبت a، b، ...، g می‌گیریم. مثلاً

$$(۳, ۶, ۱۸)=۳;\ [۶, ۱۵]=۳۰$$

ثابت کنید:

$$\frac{[a, b, c]^{۲}}{[a, b][b, c][c, a]}=\frac{(a, b, c)^{۲}}{(a, b)(b, c)(c, a)}$$

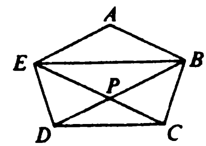
۲. (هندسه فضائی.۲). چهاروجهی متساوی‌الساقین $ABCD$ داده‌شده است: $AB=CD$، $AC=BD$، $AD=BC$. ثابت کنید، همهٔ وجه‌های این چهاروجهی، مثلث‌هایی با زاویه‌های حاده‌اند.

۳. (نظریه ترکیب ونظریهٔ احتمال.۱۴). یك انتخاب‌گر، تنهامی‌تواند از بین نه‌عدد درست ۱، ۲، ...، ۹، یك‌عددرا به‌تصادف انتخاب کند،احتمال انتخاب هرعدد، با احتمال انتخاب هرعدد دیگر، یکی‌است. احتمال این‌که، بعد از n انتخاب $(n>۱)$، حاصل‌ضرب عددهای انتخابی، مضربی از ۱۰ باشد، چقدر است؟

۴. (نابرابری‌ها. ۶). R را عددی غیرمنفی و گویا می‌گیریم. مجموعهٔ عددهای درست a، b، c، d، e و f، را طوری پیدا کنید که، برای هرمقدار دلخواه R، داشته باشیم:

$$\left|\frac{aR^۲+bR+c}{dR^۲+eR+f}-\sqrt[۳]{۲}\right|>|R-\sqrt[۳]{۲}|$$

۵. (هندسهٔ مسطحه ۶). در پنج‌ضلعی محدب $ABCDE$، می‌دانیم مساحت هر یک از پنج مثلث ABC، BCD، CDE، DEA و EAB برابر واحد است. ثابت کنید، همهٔ پنج‌ضلعی‌های محدب با این ویژگی، مساحت‌هایی برابر دارند؛ مقدار این مساحت را پیدا کنید. درضمن، ثابت کنید، بی‌نهایت پنج ضلعی با این ویژگی وجود دارند که با هم هم‌نهشت نیستند.



شکل ۱

المپیاد دوم (اول ماه مه ۱۹۷۳)

۱. (نابرابری‌های هندسی. ۷). دو نقطهٔ P و Q در درون چهاروجهی منتظم $ABCD$ واقع‌اند. ثابت کنید $\widehat{PAQ}<۶۰^\circ$.

۲. (جبر. ۱۰). دو دنبالهٔ $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ از عددهای درست، به این صورت تعریف شده‌اند:

$$X_۰=۱،\ X_۱=۱،\ X_{n+۱}=X_n+۲X_{n-۱}\ (n=۱،\ ۲،\ \ldots)؛$$

$$Y_۰=۱،\ Y_۱=۷،\ Y_{n+۱}=۲Y_n+۳Y_{n-۱}\ (n=۱،\ ۲،\ \ldots)$$

به‌این‌ترتیب، چندجملهٔ اول از این دنباله‌ها، چنین است:

$$X:\ ۱،\ ۱،\ ۳،\ ۵،\ ۱۱،\ ۲۱،\ \ldots$$

$$Y=۱،\ ۷،\ ۱۷،\ ۵۵،\ ۱۶۱،\ ۴۸۷،\ \ldots$$

ثابت کنید، بین جمله‌های دو دنباله، جملهٔ مشترکی، به‌جز ۱، وجود ندارد.

۰۳ (نظریه ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۱۲). از بین راس‌های $(2n+1)$ ضلعی منتظمی، به‌تصادف، سه‌رأس مختلف‌را انتخاب کرده‌ایم. پیش‌آمدهای مربوط به‌انتخاب هر سه رأس، از بین $(2n+1)$ رأس را، با احتمال برابر می‌گیریم. چه احتمالی وجود دارد کـه مرکز $(2n+1)$ ضلعی، در درون مثلثی با این سه رأس قرار گیرد؟

۰۴ (جبر. ۵). همهٔ جواب‌های حقیقی یا مختلط دستگاه معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

۰۵ (نظریهٔ عددها. ۶). ثابت کنید، ریشه‌های سوم سه‌عدد اول متمایز، نمی‌توانند سه‌جمله از یك تصاعد حسابی باشند (لزومی ندارد، این سه‌جمله، جمله‌های متوالی تصاعد باشند).

المپیاد سوم (هفتم مه ۱۹۷۴)

۰۱ (جبر. ۷). a و b و c را سه عدد درست متمایز و P را یك چند-جمله‌ای با ضریب‌های درست‌می گیریم. ثابت کنید، سه‌برابری‌زیر، نمی‌توانند باهم برقرار باشند:

$$P(a)=b,\ P(b)=c,\ P(c)=a$$

۰۲ (نابرابری‌ها. ۱). a و b و c، عددهایی حقیقی و مثبت‌اند ثابت کنید:

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

۰۳ (نابرابری‌های هندسی. ۶). دونقطه ازسطح کره‌ای به‌شعاع واحد را، به‌وسیلهٔ یك‌منحنی که از درون کره گذشته است، به‌هم وصل کرده‌ایم. طول این منحنی از ۲ کمتر است. ثابت کنید، تمامی این‌منحنی در درون نیم کره‌ای از کرهٔ مفروض قرار دارد.

۰۴ (نابرابری‌ها. ۸). پدر ومادر و پسر تصمیم می‌گیرند با یك بازی خانوادگی‌خود دراسر گرم کنند. دراین بازی،«تساوی»وجودندارد وقانون‌های آن‌چنین است:

I. بازی‌کن ضعیف‌تر، تصمیم می‌گیرد چه‌کسانی بازی را آغاز کنند؛

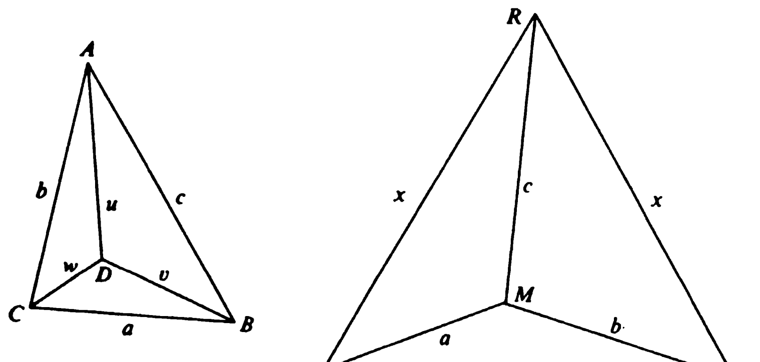
II. برندهٔ هر دور بازی، با نفر سومی که در آن شرکت نداشته است، مسابقه می‌دهد؛

III. کسی برنده به‌حساب می‌آید که، برای نخستین‌بار، دو دور بازی را ببرد.

پدر ضعیف‌ترین و پسر قوی‌ترین فرد، دراین بازی‌هستند. فرض‌براین است‌که احتمال برد هرکس، در هر دور بازی، درجریان تمامی مسابقه‌تغییر نکند. به طور شهودی می‌توان احساس کرد که پدر باید، برای نخستین‌بار، با همسرش بازی‌کند تا احتمال برد بیشتری داشته باشد. ثابت کنید، این برنامه‌ریزی، در واقع هم، بهترین نوع برای پدر است.

۰۵ (هندسهٔ مسطحه. ۷). مثلث‌های ABC و PQR را مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم. در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\widehat{ADB}=\widehat{BDC}=\widehat{CDA}=120^\circ$$



شکل ۲

ثابت کنید: $x=u+v+w$.

المپیاد چهارم (ششم مه ۱۹۷۵)

۱. (نظریهٔ عددها. ۹). الف) ثابت کنید اگر x، $y>0$، آن‌گاه

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$$

(در اینجا $[u]$، به معنای بخش درست عدد u است: یعنی بزرگترین عدد درستی که از u تجاوز نکند).

ب) با استفاده از الف)، یا به‌طریقی دیگر ثابت کنید عبارت

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای درست و مثبت m و n، عددی است درست.

۲. (نابرابری‌های هندسی. ۴). A، B، C و D، چهار نقطه در فضا هستند و منظور از AB، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B است. ثابت کنید:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2+CD^2$$

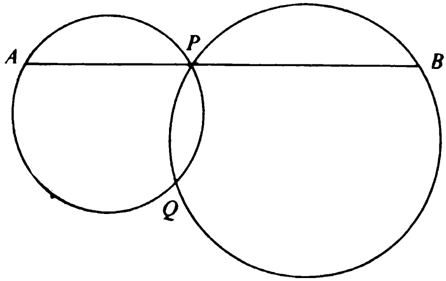
۳. (جبر. ۸). $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ nام است و می‌دانیم:

$$P(k)=\frac{k}{k+1}\quad (k=0, 1, 2, \ldots, n \text{ برای})$$

مطلوب است محاسبهٔ $P(n+1)$.

۴. (نابرابری‌های هندسی. ۲). دو دایره، در نقطه‌های P و Q متقاطع‌اند. چگونه می‌توان پاره‌خط راست AB را رسم کرد (شکل ۳)، به‌نحوی که از نقطهٔ P بگذرد، دو دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند و حاصل‌ضرب $PA.PB$، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

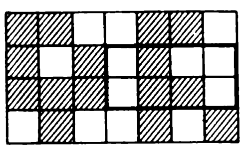
۵. (نظریه ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۱۳). یک‌دسته ورق بازی را، که شامل n کارت و ۳ تک‌خال است، به‌خوبی بُر می‌زنیم (تا آمدن هر کارتی، شانس برابر با آمدن کارت دیگر داشته باشد). سپس، کارت‌ها را از بالا، یکی‌یکی رو می‌کنیم تا تک‌خال دوم ظاهر شود. ثابت کنید، تعداد کارت‌هایی که باید رو شود، برابر است با $\frac{n+1}{2}$.



شکل ۳

المپیاد پنجم (چهارم مه ۱۹۷۶)

۱. (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۱). الف) فرض می‌کنیم، خانه‌های یك صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۴، مثلاً شبیه شکل ۴، به رنگ‌های سیاه و سفید در آمده باشند. ثابت کنید، این صفحهٔ شطرنجی شامل مستطیلی است که در چهار گوشهٔ آن، چهار مربع همرنگ وجود دارد (ضلع‌های مستطیل، روی خط‌های راست قائم و افقی صفحه قرار دارند، شبیه مستطیلی که در شکل نشان داده شده است).



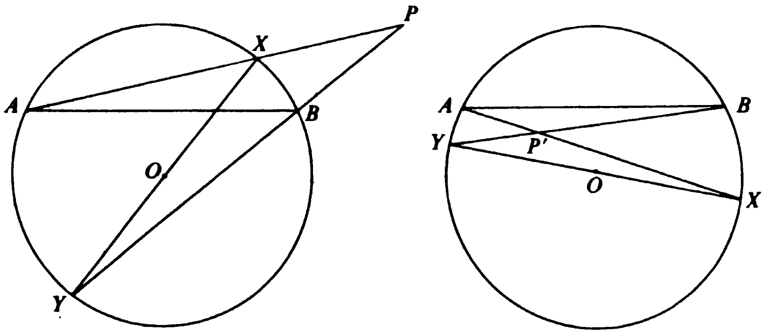
شکل ۴

ب) ثابت کنید، در مورد صفحهٔ شطرنجی ۶ × ۴، این ویژگی وجود ندارد.

۲. (هندسه مسطحه. ۴). A و B دو نقطهٔ ثابت از محیط دایره و XY قطر متغیری از آن است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ برخورد خط‌های راست AX و BY. می‌توانید فرض کنید که، AB، قطر دایره نیست.

۳. (نظریهٔ عددها. ۲). همهٔ جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$$



(a) (b)

شکل ۵

۰۴ (نابرابری‌های هندسی. ۵). اگر مجموع شش یال هرم سه قائمهٔ $PABC$ $(\widehat{APB}=\widehat{BPC}=\widehat{CPA}=90^\circ)$ برابر S باشد، حداکثر مقدار حجم هرم چقدر است؟

۰۵ (جبر. ۹). $P(x)$، $Q(x)$، $R(x)$ و $S(x)$ را چندجمله‌ای‌هایی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

ثابت کنید، $x-1$، یکی از عامل‌های $P(x)$ است.

المپیاد ششم (سوم مه ۱۹۷۷)

۰۱ (جبر. ۶). همهٔ زوج عددهای مثبت و درست (m, n) را پیدا کنید، به‌نحوی که عبارت $1+x^n+x^{2n}+\dots+x^{mn}$ بر عبارت $1+x+x^2+\dots+x^m$ بخش‌پذیر باشد.

۰۲ (هندسهٔ مسطحه. ۳). دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در یک صفحه داده شده‌اند، به‌نحوی که خط‌های راست AA'، BB' و CC' دو به‌دو با هم موازی‌اند. اگر $[ABC]$ را به معنای مساحت مثلث ABC (با علامت مناسب $\pm$) بگیریم، ثابت کنید:

$$۳([ABC]+[A'B'C'])=[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']+$$
$$+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB]$$

۰۳ (جبر. ۴). اگر a و b ریشه‌هایی ازمعادلهٔ $x^۴+x^۳-۱=۰$ باشند، ثابت کنید ab، ریشه‌ای از معادلهٔ $x^۶+x^۴+x^۳-x^۲-۱=۰$ است.

۰۴ (هندسه فضایی. ۳). ثابت کنید، اگر ضلع‌های روبه‌رو، در یک چهارضلعی چپ (چهارضلعی که رأس‌های آن روی یك صفحه نیستند)، با هم برابر باشند، آن‌وقت، خط راستی که وسط‌های دو قطر را به‌هم وصل کند، بر هردو قطر عمود است، و برعکس، اگر خط راستی که وسط قطرهای یك چهارضلعی چپ‌را به‌هم وصل‌می‌کند، برقطرها عمودباشد، آن‌وقت، ضلع‌های روبه‌رو دراین چهارضلعی باهم برابرند.

۰۵ (نابرابری‌هـ۴.۱). a، b، c، d و e، عددهایی مثبت در محدودهٔ p و q هستند، یعنی در بازهٔ $[p, q]$ واقع‌اند $(p>۰)$. ثابت کنید:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}+\frac{۱}{e}\right)\leqslant$$
$$\leqslant ۲۵+۶\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^۲$$

درچه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

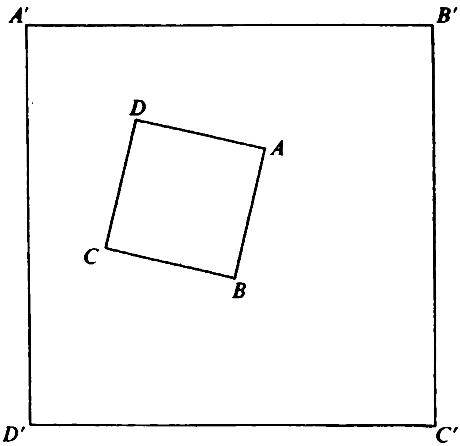
المپیاد هفتم (دوم مه ۱۹۷۸)

۰۱ (نابرابری‌ها. ۲). a، b، c، d و e، عددهایی حقیقی‌اندومی‌دانیم:

$$a+b+c+d+e=۸$$
$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+e^۲=۱۶$$

حداکثر مقدار e را پیدا کنید.

۰۲ (هندسهٔ مسطحه. ۲). $ABCD$ و $A'B'C'D'$، نگاشت‌های مربع از یك ناحیه‌اند که با مقیاس‌های مختلف رسم شده و شبیه شکل ۶، روی‌هم



شکل ۶

قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، تنها یك نقطهٔ O از مربع کوچك وجود دارد که روی نقطهٔ O' از مربع بزرگ واقع است و هردو نقطهٔ O و O'، معرف یك نقطه از ناحیه هستند. با روش‌های اقلیدسی (یعنی به‌کمك پرگار و خط‌کش) راهی برای تعیین نقطهٔ O پیدا کنید.

۰۳ (نظریهٔ عددها. ۵) عـدد درست n را «خوب» می‌نامیم، وقتی که بتوان آن‌را، به‌صورت زیر نوشت:

$$n=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{k}$$

که‌در آن، a_1، a_2، ...، a_k، عددهای درست و مثبت‌اند (لزومی ندارد متمایز باشند) و در برابری زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{a_{1}}+\frac{1}{a_{2}}+\cdots+\frac{1}{a_{k}}=1$$

می‌دانیم، عددهای ۳۳ تا ۷۳، عددهای «خوب» اند. ثابت کنید، هرعدد درست بزرگتر از ۳۳، عددی «خوب» است.

۰۴ (هندسهٔ فضایی. ۶). a) ثابت کنید، اگر زاویه‌های مسطحهٔ شش فرجه از یك چهاروجهی با هم برابر باشند، این چهاروجهی، منتظم است.

b) اگر تنها پنج فرجه، زاویه‌هـای مسطحهٔ برابر داشتند باشند، آیا بازهم چهاروجهی منتظم است؟

۰۵ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۲). ۹ ریاضی‌دان یکدیگر را در یك کنفرانس بین‌المللی ملاقات می‌کنند. معلوم شد، از بین هرسه ریاضی‌دان، دست‌کم دونفر با زبان مشترکی می‌توانند صحبت کنند. اگر هر ریاضی‌دان، حداکثر باسه‌زبان‌آشنا باشد، ثابت‌کنید، دست‌کم سه‌ریاضی‌دان وجود دارد که می‌توانند با زبانی مشترك صحبت‌کنند.

المپیاد هشتم (اول مه ۱۹۷۹)

۰۱ (نظریهٔ عددها. ۳). همـهٔ جـوابـهـای درسـت و غیـر منفـی ($n_۱$، $n_۲$، ...، $n_{۱۴}$) را، درصورت وجود، در معادلهٔ دیوفانتی

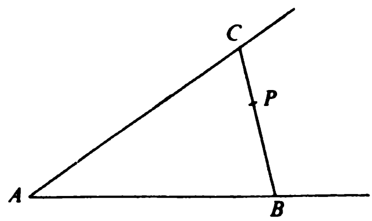
$$n_۱^۴+n_۲^۴+\cdots+n_{۱۴}^۴=۱۵۹۹$$

پیدا کنید. جواب‌هایی که از تبدیل یکدیگر به دست می‌آیند، یـك جواب به‌حساب آورید.

۰۲ (هندسهٔ فضایی. ۱). S رادایرهٔ عظیمهٔ کره‌ای به‌قطب Pمی‌گیریم. روی دایرهٔ عظیمه‌ای که از P می‌گذرد، دو نقطهٔ A و B را به یك فاصله از P انتخاب کرده‌ایم. مثلث کروی ABC را (که ضلع‌های آن،کمان‌هایی از دایره‌های عظیمه‌اند)، در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که C، نقطه‌ای از S باشد. ثابت‌کنید، کمان PC از دایرهٔ عظیمه، نیمساز زاویهٔ C است.

یادداشت. دایرهٔ عظیمه کره، دایره‌ای است‌که مرکز آن بر مرکز کره منطبق باشد. قطب دایرهٔ عظیمه S، نقطه‌ای مانند P از سطح کره است، وقتی که، قطری ازکره‌که از P می‌گذرد. برصفحهٔ دایرهٔ S عمود باشد.

۰۳ (نابرابری‌ها. ۹). سه‌تاس n وجهی یکسان در اختیار داریم. روی وجه‌های متناظر این سه‌تاس، عددهای درست برابری، به‌طور دلخواه، نوشته شده است. ثابت‌کنید، اگراین سه‌تاس‌را به‌تصادف بـریزیم، احتمال این‌که مجموع عددهای روی سه قاعدهٔ تاس‌ها، بـر ۳ بخش‌پذیر باشد، بزرگتر یا



شکل ۷

برابر $\frac{1}{4}$ است.

۴. (نابرابری‌های هندسی. ۱). نقطهٔ P در درون زاویهٔ مفروض A واقع است (شکل ۷). چگونه می‌توان خط راستی از نقطهٔ P گذراند، به نحوی که ضلع‌های زاویه را در نقطه‌های B و C قطع کند و مقدار $\frac{1}{BP}+\frac{1}{PC}$ حداکثر مقدار ممکن باشد؟

۵. (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۶). سازمانی n عضو دارد. عضوهای این سازمان، در $n+1$ کمیتهٔ سه‌نفری شرکت می‌کنند. هیچ دو کمیته‌ای، در همهٔ عضو، یکسان نیستند. ثابت کنید، دو کمیته وجود دارد که تنها در یك عضو خود مشترك‌اند.

المپیاد نهم (ششم مه ۱۹۸۰)

۱. (جبر. ۱). ترازوی دوکفه‌ای، به‌علت برابرنبودن طول دو بازو و هم‌وزن نبودن دو کفهٔ خود، درست عمل نمی‌کند. سه شیء به وزن‌های A، B و C (با وزن‌های مختلف) را به‌ترتیب، در کفهٔ چپ ترازو گذاشتیم و وزن‌های A_1، B_1 و C_1 را به‌دست آوردیم. سپس A و B را، به‌ترتیب، در کفهٔ راست ترازو گذاشتیم و وزن‌های A_2 و B_2 را پیدا کردیم. وزن واقعی شیء C را برحسب A_1، B_1، C_1، A_2 و B_2 به‌دست آورید.

۲. (نابرابری‌ها. ۵). حداکثر، چند تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای متفاوت می‌توان از دنبالهٔ عددی زیر، که شامل n عدد حقیقی است، انتخاب کرد:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

۰۳ (جبر. ۱۱). فرض کنید:

$$F_r = x^r \sin rA + y^r \sin rB + z^r \sin rC$$

که در آن، x ، y ، z، A، B و C، عددهایی حقیقی اند و $A+B+C$، مضرب درستی از عدد π است. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $F_1 = F_2 = 0$، آن گاه F_r، به‌ازای همهٔ مقدارهای درست و مثبت r، برابر صفر است.

۰۴ (هندسهٔ فضایی. ۷). کره‌ای که در یك چهار وجهی محـاط شده است، بر هر وجه چهاروجهی، در مرکز هندسی آن، مماس است. ثابت کنید، این چهاروجهی، منتظم است.

۰۵ (نابرابری‌ها. ۳). ثابت کنید، بـرای عددهای a و b و c از بازهٔ $[0, 1]$ داریم:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} +$$
$$+ (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$$

المپیاد دهم (پنجم مه ۱۹۸۱)

۰۱ (هندسهٔ مسطحه. ۱). زاویه‌ای برابر $\frac{180}{n}$ درجه است که، در آن n عددی است درست و غیر قابل بخش بر عدد ۳. ثابت کنید، این زاویه را می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش، به سه بخش برابر تقسیم کرد.

۰۲ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۷). هردو ایالت از یك کشور، با یکی از سه روش مسافرتی زیر به هم مربوط‌اند: اتوبوس، قطار یا هواپیما. درکشور از هر سه روش مسافرتی استفاده می‌شود؛ در ضمن، هیچ دو ایالتی با هرسه‌وسیله به‌هم مربوط نشده‌اند و، همچنین، هیچ سه‌ایالتی نمی‌توان پیدا کرد که وسیلهٔ ارتباطی بین‌هردو تا از آن‌ها، یکسان باشد. این کشور، حداکثر چند ایالت دارد؟

۰۳ (نابرابری‌های هندسی. ۳). اگر A و B و C، زاویه‌های یک‌مثلث باشند، ثابت کنید:

$$-۲\leqslant \sin ۳A+\sin ۳B+\sin ۳C\leqslant \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

در چه‌حالت‌هایی، به برابری می‌رسیم؟

۰۴ (هندسهٔ فضایی. ۵). مجموع زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های یک کنج چندوجهی محدب، برابر است با مجموع همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ رأس کنج. ثابت کنید، این کنج، یک کنج سه‌وجهی است.

۰۵ (نابرابری‌ها. ۱۰). x عددی‌حقیقی و n عددی‌درست و مثبت‌است، ثابت کنید:

$$[nx]>\frac{[x]}{۱}+\frac{[۲x]}{۲}+\dots+\frac{[nx]}{n}$$

منظور از $[t]$، بزرگترین عدد درست‌کوچکتر یا برابر t است.

المپیاد یازدهم (چهارم مه ۱۹۸۲)

۰۱ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۳). دریک اجتماع ۱۹۸۲ نفری، درهر گروه ۴ نفری، دست‌کم یک‌نفر وجود داردکه سه‌نفر دیگر را می‌شناسد. دست‌کم چندنفر دراین اجتماع وجود دارندکه‌همهٔ دیگران را می‌شناسند؟

۰۲ (جبر. ۱۲). x و y و z را عدهای حقیقی و

$$S_r=x^r+y^r+z^r$$

می‌گیریم. به‌شرط $S_1=0$، معادلهٔ

$$\frac{S_{m+n}}{m+n}=\frac{S_m}{m}\cdot\frac{S_n}{n} \qquad (*)$$

برای عددهای درست m و n جواب‌هایی دارد، مثلاً

$$(m, n)=(۲, ۳), (۳, ۲), (\ , ۵), (۵, ۲)$$

دوتایی‌های درست دیگر $(m \ n)$ را درصورت وجود، پیدا کنید، به نحوی

که در معادلهٔ (*) برای عددهای حقیقی x وy وz، باشرط $x+y+z=0$ صدق کنند.

۳. (نابرابری‌های هندسی. ۱۰). اگــر A_1 نقطــه‌ای در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC وA_2 نقطه‌ای‌در درون مثلثA_1BC باشند، ثابت کنید:

$$\mathrm{I{\cdot}Q{\cdot}}(A_1BC)>\mathrm{I{\cdot}Q{\cdot}}(A_2BC)$$

که‌در آن، منظور از.I.Q، نسبت هم‌پیرامونی شکل است؛ نسبت هم‌پیرامونی شکل F، به‌این‌صورت تعریف می‌شود:

$$\mathrm{I{\cdot}Q{\cdot}}(F)=\frac{S_F}{(P_F)^2}$$

(S_F مساحت و P_F محیط شکل F است).

۴. (نظریهٔ عددها. ۱۰). ثابت کنید، عدددرست ومثبت k وجود دارد، به‌نحوی که $k.2^n+1$، به‌ازای هر مقدار درست و مثبت n، عــددی مرکب (غیراول) باشد.

۵. (هندسهٔ فضایی. ۸). A و B و C، سه نقطهٔ واقع در درون کرهٔ S هستند، به‌نحوی کهAB وAC، برقطری از کرهٔ Sکه از A می‌گذرد، عمودند. دوکره، از نقطه‌های A و B و C گذرانده‌ایم که، هردوی آن‌ها، بر کرهٔ S مماس‌اند. ثابت کنید، مجموع شعاع‌های این‌دوکره، برابربا شعاع کرهٔSاست.

المپیاد دوازدهم (سوم مه ۱۹۸۳)

۱. (نظریهٔ ترکیب ونظریهٔ احتمال. ۱۱). شش نقطهٔ متمایز A، B، C، D، E وF را، به‌تصادف، برمحیط‌دایرهٔ‌مفروضی‌انتخاب کرده‌ایم، چه‌احتمالی وجود داردکه دومثلث ABC وDEFجدا از هم باشند (یعنی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند).

۲. (جبر. ۲). ثابت کنید، به‌شرط $2a^2<5b$، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

نمی‌توانند حقیقی باشند.

۰۳ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۸). هـر مجموعه، از خـانوادهٔ زیرمجموعه‌های متناهی یك خط، اجتماعی از دو بازهٔ بسته است. به‌جز این، هرسه مجموعه از این خانوادهٔ نقطه‌ای مشترك‌دارند. ثابت کنید، نقطه‌ای‌وجود داردکه، دست‌کم، در نصف مجموعه‌های خانواده، مشترك است.

۰۴ (هندسهٔ‌فضایی.۴). شش‌پاره‌خط‌راست S_1، S_2، S_3، S_4، S_5 و S_6 دریك صفحه داده شده‌اند. این‌شش‌پاره‌خط‌راست، به‌ترتیب، با یال‌های AB، AC، AD، BC، BD، CD ازچهاروجهی $ABCD$ برابرند. چگونه‌می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش، پاره‌خط راستی ساخت کـه، طول آن، برابر با ارتفاع وارد از رأس A در چهاروجهی $ABCD$ باشد؟

۰۵ (نظریهٔ عددها. ۱۱). فاصله‌ای‌باز به‌طول $\frac{1}{n}$ را روی‌محورعددهای حقیقی در نظر می‌گیریم (n، عددی است درست و مثبت). ثابت‌کنید، تعداد کسرهای تحویل ناپذیر $\frac{p}{q}$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$، دراین فاصله، حداکثر برابر است با $\frac{n+1}{2}$.

المپیاد سیزدهم (اول مه ۱۹۸۴)

۰۱ (جبر. ۳). حاصل‌ضرب دو ریشه از معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

برابر است با ۳۲−. مقدار k را پیداکنید.

۰۲ (نظریهٔ عددها. ۷). واسطهٔ هندسی n عدد غیرمنفی، برابر است با ریشهٔ nام حاصل‌ضرب آن‌ها.

I) آیا برای هرعدددرست و مثبت n، مجموعهٔ متناهی S_n شامل n عدد درست و مثبت متمایز وجود دارد، به‌نحوی که واسطهٔ هندسی جمله‌های هـر زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ S_n، عددی درست باشد؟

II) آیا مجموعهٔ نامتناهی S از عددهای متمایز درست و مثبت وجود

دارد، به‌نحوی که واسطهٔ هندسی جمله‌های هرزیرمجموعهٔ متناهی آن، عددی درست باشد؟

۳. (نابرابری‌های هندسی. ۹). P، A، B، C و D، پنج نقطهٔ متمایز از فضا هستند، به نحوی که

$$\widehat{APB}=\widehat{BPC}=\widehat{CPD}=\widehat{DPA}=\theta$$

(θ، زاویهٔ حادهٔ مفروضی است). حداکثر و حداقل مقدار $\widehat{APC}+\widehat{BPD}$ را پیدا کنید.

۴. (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۱۰). یك مسابقهٔ دشوار ریاضی در دوقسمت I و II و روی‌هم ۲۸ مساله انجام شده است. هر شرکت‌کننده ۷ مساله را حل کرده است. برای هردو مساله، درست دو شرکت‌کننده‌وجود دارد که هردو مساله را حل کرده‌اند. ثابت‌کنید، شرکت‌کننده‌ای وجود دارد که از قسمت I، یا هیچ‌کدام از مساله‌ها را حل نکرده است و یا، دست‌کم چهارمساله را حل کرده است.

۵. (جبر. ۱۳). $P(x)$، یك چندجمله‌ای از درجهٔ nاست و می‌دانیم:

$$P(0)=P(3)=\dots=P(3n)=2$$
$$P(1)=P(4)=\dots=P(3n-2)=1$$
$$P(2)=P(5)=\dots=P(3n-1)=0,$$
$$P(3n+1)=730$$

مطلوب است محاسبهٔ n.

المپیاد چهاردهم (سی‌ام آوریل ۱۹۸۵)

۱. (نظریهٔ عددها. ۴). ثابت کنید، در هر حال، برای دستگاه دو معادلهٔ

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{1985}^2=y^3$$
$$x_1^3+x_2^3+\dots+x_{1985}^3=z^2$$

جواب درست و مثبت وجود دارد. عددهای x_1، x_2، ...، x_{1985}، درست و متمایزاند.

۰۲ (نابرابری‌ها. ۷). هر ریشهٔ حقیقی معادلهٔ زیر را تا چهار رقم بعد از ممیز محاسبه کنید:

$$x^{4}-(2\times 10^{10}+1)x^{2}-x+10^{20}+10^{10}-1=0$$

۰۳ (نابرابری‌های هندسی. ۸). A، B، C و D را چهار نقطه از فضا می‌گیریم، به‌نحوی که، حداکثر یکی از فاصله‌های AB، AC، AD، BC، BD، و CD بزرگتر از واحد باشد. حداکثر مقدار مجموع این شش فاصله را پیدا کنید.

۰۴ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۴). در اجتماعی n نفر وجود دارند. ثابت کنید، دو نفر وجود دارند، به‌نحوی که از $(n-2)$ نفر بقیه، $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ نفر، یا هر دو را می‌شناسند و یا با هیچ‌کدام از این دو نفر آشنا نیستند. بین آشنایی افراد، رابطهٔ متقارن وجود دارد، یعنی اگر A با B آشنا باشد، B هم با A آشناست. منظور از $[x]$، بخش درست عدد x است، یعنی بزرگترین عدد درست کوچکتر از x.

۰۵ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۹). a_1، a_2، a_3، ... را، دنباله‌ای از عددهای درست و مثبت می‌گیریم. برای $m\geqslant 1$ تعریف می‌کنیم:

$$b_m=\min\{n: a_n\geqslant m\}$$

یعنی b_m عبارت است از کمترین مقدار n که، به‌ازای آن، داشته باشیم: $a_n\geqslant m$.
اگر $a_{19}=85$، بیشترین مقدار این مجموع را پیدا کنید:

$$a_1+a_2+\cdots+a_{19}+b_1+b_2+\cdots+b_{85}$$

المپیاد پانزدهم (بیست‌ودوم آوریل ۱۹۸۶)

۰۱ (نظریهٔ عددها. ۱۲). a) آیا ۱۴ عدد مثبت و درست متوالی وجود دارد، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها، بر یک یا چند عدد اول p، با شرط $2\leqslant p\leqslant 11$ بخش‌پذیر باشد؟

b) آیا ۲۱ عدد مثبت و درست متوالی وجود دارد، به‌نحوی که هر کدام

از آن‌ها، بریك یا چند عدد اول p، به شرط $۲ \leqslant p \leqslant ۱۳$ بخش‌پذیر باشد؟

۰۲ (نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال. ۵). درطول یك جلسهٔ سخن‌رانی هریك‌ازپنج ریاضی‌دان، درست دو بار خواب رفته‌است. برای‌هردو ریاضی‌دان لحظه‌ای وجود داردکه هر دو در خواب بوده‌اند. ثابت کنید، در این لحظه، سه ریاضی‌دان، هم‌زمان، به‌خواب رفته‌اند.

۰۳ (نظریهٔ عددها. ۸). کوچکترین عدد درست و مثبت n را پیدا کنید ($n > ۱$) که، به‌ازای آن، ریشهٔ دوم واسطهٔ حسابی‌مجذورهای نخستین n عدد درست، عددی درست باشد.

یادداشت. ریشهٔ‌دوم‌واسطهٔ حسابی مجذورهای n عدد $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n چنین است:

$$\left[\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲}{n}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

۰۴ (هندسهٔ مسطحه. ۵). دودایرهٔ متمایز $k_۱$ و $k_۲$، واقع در یك‌صفحه، یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده‌اند ومی‌دانیم، AB قطری از دایرهٔ $k_۱$ است. نقطهٔ P را روی‌محیط دایرهٔ $k_۲$ و در درون‌دایرهٔ $k_۱$ در نظرمی گیریم. تنها با استفاده از وسیلهٔ $\top$ (که به‌کمك آن می‌توان خط راستی‌کشید که‌از دو نقطه مفروض می گذرد و از نقطهٔ مفروض، عمودی بر خط راست مفروض رسم کرد)، دو نقطـهٔ C و D را روی محیط دایرهٔ $k_۱$ طوری پیدا کنید که CD بر AB عمود، و اندازهٔ زاویهٔ CPD برابر ۹۰ درجه باشد.

۰۵ (نظریه عددها. ۱۳). اگر عدددرست $n \geqslant ۱$ رابه‌صورت‌مجموعی از یك یا چند عـدد درست و مثبت بنویسیم و جمله‌های جمع را بـه‌صورت صعودی درنظـر بگیریم، آن وقت این مجموعه را یك افراز عدد n گوییم و آن‌را با π نشان می‌دهیم. مثلاً برای $n = ۴$، افرازهای π چنین‌اند:

$$۱+۱+۱+۱،\ ۱+۱+۲،\ ۱+۳،\ ۲+۲،\ ۴$$

برای هر افراز π، تعداد واحدهایی راکه در π ظاهر شده‌اند با $A(\pi)$

و تعداد عددهای متمایزی را که در π به‌کار رفته‌اند با $B(\pi)$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر ۱۳ $=n$ و π یك افراز به‌صورت ۵+۲+۲+۲+۱+۱ باشد، آن‌وقت، برای این افراز، ۲ $=A(\pi)$ و ۳ $=B(\pi)$.

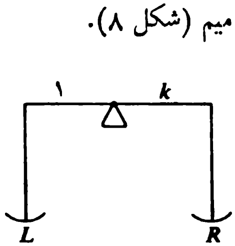
ثابت کنید، برای هرعدد ثابت n، اگر همهٔ افرازهای π آن‌را در نظر بگیریم، مجموع $A(\pi)$ها با مجموع $B(\pi)$ها برابر است.

حل مساله‌ها

جبر

۱. (۱/۱۹۸۰). یک ترازوی دوکفه‌ای، به‌علت برابر نبودن طول دو بازو و هم‌وزن نبودن دو کفهٔ خود، درست عمل نمی‌کند. سه شیء به‌وزن‌های A، B و C (با وزن‌های مختلف) را، به‌ترتیب، درکفهٔ چپ ترازو گذاشتیم و وزن‌های A_1، B_1 و C_1 را به دست آوردیم. سپس A و B را، به‌ترتیب، در کفهٔ راست ترازو گذاشتیم و وزن‌های A_2 و B_2 را پیدا کردیم. وزن واقعی شیء C را برحسب A_1، B_1، C_1، A_2 و B_2 به‌دست آورید.

حل. طول بازوی چپ ترازو را، به‌عنوان واحد انتخاب می کنیم. فرض می‌کنیم، طول بازوی راست برابر با k باشد؛ وزن کفه‌های چپ و راست ترازو را، به‌ترتیب L و R می‌نامیم (شکل ۸).



شکل ۸

بنا بر قانون تعادل، مجموع گشتاورهای مربـوط به دو طرف شاهین ترازو، برابر صفر است. بنابراین، به‌پنج معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(۱)\ A+L=k(A_۱+R)،\ (۲)\ B+L=k(B_۱+R)،$$

$$(۳)\ C+L=k(C_۱+R)،\ (۴)\ A_۲+L=k(A+R)،$$

$$(۵)\ B_۲+L=k(B+R)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$A-B=k(A_۱-B_۱)$$

و از معادله‌های (۴) و (۵):

$$A_۲-B_۲=k(A-B)$$

بنابراین

$$k^۲=\frac{A_۲-B_۲}{A_۱-B_۱}$$

معادلهٔ (۱) را از معادلهٔ (۴) کم می‌کنیم، از معادلهٔ حاصل به‌دست می‌آید:

$$A=\frac{k(A_۱+A_۲)}{k+۱}$$

معادلهٔ (۱) را از (۳) کم می‌کنیم و از معادلهٔ حاصل به‌دست می‌آوریم:

$$C=A+k(C_۱-A_۱)$$

سرانجام، اگر مقدارهای A و k را در رابطهٔ اخیر قرار دهیم، بعداز تبدیل‌های ساده، به‌دست می‌آید:

$$C=\frac{C_۱[\sqrt{(A_۱-B_۱)(A_۲-B_۲)}+(A_۲-B_۲)]+A_۱B_۲-A_۲B_۱}{\sqrt{(A_۱-B_۱)(A_۲-B_۲)}+A_۱-B_۱}$$

۰۲ (۲/۱۹۸۳). ثابت‌کنید، به‌شرط $۲a^۲<۵b$، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۵+ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e=۰$$

نمی‌توانند حقیقی باشند.

حل. ریشه‌های معادله‌را با r_i ($i = ۱، ۲، ...، ۵$) نشان می‌دهیم. داریم:

$$-a = \sum r_i \quad و \quad b = \sum r_i r_j$$

بنابراین، نابرابری $۲a^{۲} - ۵b < ۰$، با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$۲(\sum r_i)^{۲} - ۵\sum r_i r_j < ۰ \Rightarrow \sum(r_i - r_j)^{۲} < ۰$$

که برای عددهای حقیقی ممکن نیست، یعنی همهٔ ریشه‌های معادله، نمی‌توانند حقیقی باشند.

یکی از شرکت‌کنندگان، مساله‌را با استفاده ازمشتق و با توجه به‌قضیهٔ رول حل کرده است: برای آن‌که تابع

$$F(x) = x^{۵} + ax^{۴} + bx^{۳} + cx^{۲} + dx + e$$

پنج صفر حقیقی داشته باشد، باید مشتق آن، $F'(x)$، دارای چهار صفر حقیقی باشد. به‌همین‌ترتیب، $F''(x)$ و $F'''(x)$ باید، به‌ترتیب، دارای‌سه و دوصفر حقیقی باشند ولی برای $F'''(x)$ داریم:

$$F'''(x) = ۶۰x^{۲} + ۲۴ax + ۶b$$

مبین این عبارت درجهٔ دوم برابراست با $۲۸۸(۲a^{۲} - ۵b)$ که، بنابه‌فرض منفی‌است. بنابراین، معادلهٔ $F(x) = ۰$ نمی‌تواند پنج ریشهٔ حقیقی داشته‌باشد.

این مساله را می‌توان به‌صورت زیر، تعمیم داد: اگر در معادلهٔ

$$x^{n} + a_{۱}x^{n-۱} + \dots + a_{n-۱}x + a_{n} = ۰$$

داشته باشیم $(n - ۱)a_{۱}^{۲} - ۲na_{۲} < ۰$، آن‌وقت‌همهٔ‌ریشه‌های‌معادله‌نمی‌توانند حقیقی باشند (که به‌ازای $n = ۵$، به مسالهٔ خودمان می‌رسیم).

۰۳ (۱/۱۹۸۴). حاصل‌ضرب دو ریشه از معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$x^{۴} - ۱۸x^{۳} + kx^{۲} + ۲۰۰x - ۱۹۸۴ = ۰$$

برابر است با ۳۲−. مقدار k را پیدا کنید.

حل. $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$ و $r_۴$ را ریشه‌هـای معادلهٔ مفروض می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $r_۱r_۲=-۳۲$. دراین‌صورت

$$r_۳r_۴=\frac{r_۱r_۲r_۳r_۴}{r_۱r_۲}=\frac{-۱۹۸۴}{-۳۲}=۶۲$$

و بنابراین، برای مقدارهایی مثل p و q خواهیم داشت:

$$x^۴-۱۸x^۳+kx^۲+۲۰۰x-۱۹۸۴\equiv$$
$$\equiv(x-r_۱)(x-r_۲)(x-r_۳)(x-r_۴)=$$
$$=(x^۲-px-۳۲)(x^۲-qx+۶۲)$$

اگر در اتحاد بالا، ضریب جمله‌های متشابه را دوطرف برابری، برابر قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$p+q=۱۸،\ -۶۲p+۳۲q=۲۰۰،\ k=۳۰+pq$$

از حل دومعادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $p=۴$، $q=۱۴$. وسرانجام

$$k=۳۰+۴\times۱۴=۸۶$$

۴. (۳/۱۹۷۷). اگر a و b ریشه‌هایی از معـادلهٔ $x^۴+x^۳-۱=۰$ باشند، ثابت‌کنید، ab ریشه‌ای‌ازمعادلهٔ $x^۶+x^۴+x^۳-x^۲-۱=۰$ است.

حل. a، b، c و d راچهار ریشهٔ معادلهٔ مفروض‌و، درضمن $p=a+b$، $q=ab$، $r=c+d$ و $s=cd$ می‌گیریم. دراین‌صورت

$$-۱=a+b+c+d=p+r \qquad (۱)$$

$$۰=ab+ac+ad+bc+bd+cd=pr+q+s \qquad (۲)$$

$$۰=abc+bcd+cda+dab=ps+qr \qquad (۳)$$

$$-۱=abcd=qs \qquad (۴)$$

اکنون بین این معادله‌ها، p، r و s را حذف می‌کنیم، از (۱) و (۴) به‌دست می‌آید:

$$r=1-p, \; s=-\frac{1}{q}$$

این مقدارها را در (۲) و (۳) قرار می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود:

$$p(1+p)=q-\frac{1}{q}, \; p=\frac{-q^2}{q^2+1}$$

و سرانجام

$$\frac{-q^2}{(q^2+1)^2}=\frac{q^2-1}{q} \Rightarrow q^6+q^4+q^3-q^2-1=0$$

تعمیم. اگر a، b، c و d ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$x^4-a_1x^3+a_2x^2-a_3x+a_4=0$$

باشند، می‌توانیم معادله‌ای از درجهٔ ششم پیدا کنیم که ab (یا شبیه‌آن، یکی از حاصلضرب‌های ac، ad، bc، bd، cd) یکی از ریشه‌های آن باشد.

اگر درسمت‌چپ برابری‌های از (۱) تا (۴)، به‌ترتیب، a_1، a_2، a_3 و a_4 قرار دهیم، و کار را شبیه حل مساله دنبال کنیم، بعد از انجام عمل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$x^6-a_2x^5+(a_1a_3-a_4)x^4+(2a_2a_4-a_3^2-a_1^2a_4)x^3+$$
$$+(a_1a_3-a_4)a_4x^2-a_2a_4^2x+a_4^3=0$$

یادداشت. درواقع، می‌توان‌هر تابع دلخواهی‌از ریشه‌ها، مثلاً $\frac{a}{b^2+c^3}$ را درنظر گرفت و، سپس، معادله‌ای با ضریب‌های درست پیدا کرد، به‌نحوی که این مقدار، ریشه‌ای ازآن باشد.

دراین‌جا، مساله منجر به بیان عبارت متقارنی که از جمله‌های $\frac{a}{b^2+c^3}$ و شبیه آن تشکیل شده است، برحسب عبارت‌های سادهٔ متقارن از a، b، c و d می‌شود. در مثال ما، به یک چندجمله‌ای از درجهٔ $3!C_4^3=24$ می‌رسیم،

زیرا باید همهٔ مقدارهای ممکن $\frac{a}{b^{۲}+c^{۳}}$، $\frac{a}{b^{۳}+c^{۲}}$، $\frac{b}{c^{۳}+a^{۲}}$، $\frac{b}{a^{۲}+c^{۳}}$ وغیره را در نظر بگیریم.

۵. (۴/۱۹۷۳). همهٔ جواب‌های حقیقی یا مختلط دستگاه معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x+y+z=۳، \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۳، \\ x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}=۳ \end{cases}$$

حل. اگر x و y و z را، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم

$$t^{۳}-at^{۲}+bt-c=۰ \qquad (*)$$

در نظر بگیریم، باید قرار دهیم:

$$a=x+y+z=۳،$$

$$۲b=۲(yz+zx+xy)=(x+y+z)^{۲}-(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})=۶،$$

x و y و z ریشه‌های معادلهٔ (*) هستند و، بنابراین، در آن صدق می‌کنند. به‌جای t، به‌ترتیب، x و y و z را قرار می‌دهیم و، سپس، سه برابری حاصل را باهم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-a(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})+b(x+y+z)-۳c=۰$$

و یا

$$۳-۳a+۳b-۳c=۰$$

و چون داریم $a=b=۳$، بنابراین بـه دست می‌آید: $c=۱$. معادلهٔ (*) به‌صورت $(t-۱)^{۳}=۰$ درمی‌آید و تنها جواب دستگاه چنین است:

$$(x، y، z)=(۱، ۱، ۱)$$

به‌طور کلی، می‌توان ثابت کرد که اگر داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k ,\ (k=1, 2, \dots, n)$$

و a_iها، ثابت‌های مفروضی باشند، صرف‌نظر از تبدیل‌های مختلف، داریم:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

اثبات، بااستفاده ازدستورهای نیوتون به‌دست‌می‌آید. اگر فرض کنیم:

$$S_r = \sum a_i^r,\ T_1 = \sum x_i,\ T_2 = \sum x_i x_j,\ T_3 = \sum x_i x_i x_k, \dots$$

آن‌وقت خواهیم داشت:

$$S_1 - T_1 = 0,\ S_2 - T_1 S_1 + 2T_2 = 0, \dots,$$

$$S_{n-1} - T_1 S_{n-2} + T_2 S_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}(n-1)T_{n-1} = 0,$$

و به‌طور کلی، برای $r \geqslant n$:

$$S_r - T_1 S_{r-1} + T_2 S_{r-2} - \dots + (-1)^n T_n S_{r-n} = 0$$

از این رابطه‌ها، روشن می‌شود که S_k، به‌عنوان تابعی از T_1، T_2، ...، T_k، به‌صورتی منحصر به‌فرد، قابل محاسبه‌است؛ همچنین S_k را می‌توان به‌صورتی منحصربه‌فرد، به‌عنوان‌تابعی از S_1، S_2، ...، S_k پیدا کرد. بنابراین، تابع‌های سادهٔ متقارن نسبت به x_iها، با تابع‌های سادهٔ متقارن نسبت‌به a_iها، همانندند. از آن‌جا

$$\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

که ما را به‌نتیجهٔ موردنظر می‌رساند.

درمسالهٔ ما داریم: $n=3$ و $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

۶. (۱/۱۹۷۷). همهٔزوج‌عددهای‌مثبت و درست (m, n) را پیداکنید، به نحوی که عبارت $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$ بر عبارت $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ بخش‌پذیر باشد.

حل. ازآن‌جاکه، دوعبارت مفروض، به‌ترتیب، با

$$\frac{x^{m+1}-1}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{x^{n(m+1)}-1}{x^n-1}$$

هم‌ارزند، بنابراین باید روشن کنیم، کسر

$$\frac{(x^{n(m+1)}-1)(x-1)}{(x^{m+1}-1)(x^n-1)}$$

درچه حالت‌هایی، به‌صورت یك چندجمله‌ای درمی‌آید!

چون همهٔ عامل‌های $x^{n(m+1)}-1$ متمایزند، عبارت‌های $x^{m+1}-1$ و x^n-1 نمی‌توانند، به‌جز $x-1$،عامل مشترك دیگری‌داشته باشند و، بنابراین، $m+1$ و n باید نسبت به‌هم اول باشند. همین شرط، کافی هم‌هست، زیرا

$$x^{m(n+1)}-1=(x^n)^{m+1}-1=(x^{m+1})^n-1$$

یعنی هم بر x^n-1 و هم بر $x^{m+1}-1$ بخش‌پذیر است.

۰۷ (۱/۱۹۷۴). a و b و c را سه‌عدد درست متمایز و P را یك چند-جمله‌ای باضریب‌های درست می‌گیریم. ثابت کنید، سه برابری زیر، باهم نمی‌توانند برقرار باشند:

$$P(a)=b،\ P(b)=c،\ P(c)=a$$

حل. حکم کلی‌تری را ثابت می‌کنیم: اگر a_1، a_2، ...، a_n عددهای درست متمایز و P، یك چندجمله‌ای با ضریب‌های درست باشند، آن‌گاه غیرممکن است که، به‌ازای $k=1،2،...،n$ داشته باشیم:

$$P(a_k)=a_{k+1}،\ (a_{n+k}=a_k)$$

چون P، یك چندجمله‌ای به‌صورت $b_0+b_1x+...+b_mx^m$ است، بنابراین، برای هردو عدد درست r و s، باید داشته باشیم:

$$P(r)-P(s)=(r-s)\cdot Q(r، s)$$

که‌درآن، $Q(r، s)$، عددی‌درست‌است. به‌این‌ترتیب، اگر برای‌همهٔ‌مقدارهای k، داشته باشیم $P(a_k)=a_{k+1}$، باید درضمن داشته باشیم:

$$a_{k+1}-a_{k+2}=P(a_k)-P(a_{k+1})=(a_k-a_{k+1})\cdot Q(a_k، a_{k+1})$$

(برای $k=1،2،...،n$). اکنون، اگر این n برابری را درهم ضرب کنیم،

به‌دست می‌آید:

$$Q(a_1, a_2)\cdot Q(a_2, a_3)\cdots Q(a_n, a_1)=1$$

بنابراین، باید برای همهٔ مقدارهای k داشته باشیم:

$$Q(a_k, a_{k+1})=\pm 1 \text{ و } a_{k+1}-a_{k+2}=\pm(a_k-a_{k+1})$$

یعنی

$$|a_1-a_2|=|a_2-a_3|=\cdots=|a_n-a_1|$$

از برابری $|a_1-a_2|=|a_2-a_3|$ نتیجه می‌شود:

$$a_1-a_2=a_2-a_3 \text{ یا } a_1-a_2=-(a_2-a_3)$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $a_1=a_3$ که فرض‌را نقض می‌کند (طبق‌فرض، a_iها متمایزند). بنابراین $a_1-a_2=a_2-a_3$؛ و به‌همین‌ترتیب

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\cdots=a_n-a_1$$

این nعبارت، مجموعی برابر صفر دارند و، بنابراین، تنها وقتی باهم برابرند که همهٔ آن‌ها برابر صفر باشند، یعنی وقتی که همهٔ a_iها باهم برابر باشند، که بازهم، فرض‌را نقض می‌کند.

۸. (۳/ ۱۹۷۵). $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ nام است و می‌دانیم:

$$P(k)=\frac{k}{k+1} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

مطلوب است محاسبهٔ $P(n+1)$.

حل. $Q(x)=(x+1)P(x)-x$ می‌گیریم. چون $Q(x)$، چندجمله‌ای از درجهٔ $n+1$ است و بـه‌ازای $x=0, 1, 2, \ldots, n$ برابر صفر می‌شود، باید داشته باشیم:

$$Q(x)=(x+1)P(x)-x=Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

که در آن، A، مقداری است ثابت. برای پیدا کردن A، در دوطرف اتحاد فوق، قرار می‌دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید: $1=A(-1)^{n+1}(n+1)$.

بنابراین

$$P(x)=\frac{1}{x+1}\left(x+\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\dots(x-n)}{(n+1)!}\right)$$

که از آن‌جا، مقدار $P(n+1)$ به‌دست می‌آید:

اگر n، عددی فرد باشد: $P(n+1)=0$؛

اگر n، عددی زوج باشد: $P(n+1)=\frac{n}{n+2}$.

۰۹. (۵/۱۹۷۶). $P(x)$، $Q(x)$، $R(x)$ و $S(x)$ را، چندجمله‌ای‌هایی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

ثابت کنید، $x-1$ یکی از عامل‌های $P(x)$ است.

حل. مسالهٔ کلی‌تری را حل می‌کنیم: اگر $P_0(x)$، $P_1(x)$، ...، $P_{n-2}(x)$ و $S(x)$ $(n\geqslant 2)$ چندجمله‌ای‌هایی باشند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P_0(x^n)+xP_1(x^n)+\dots+x^{n-2}P_{n-2}(x^n)=$$
$$=(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)\cdot S(x)$$

آن‌وقت، برای همهٔ مقدارهای i، عبارت $x-1$ یکی از عامل‌های $P_i(x)$ است.

ω_i $(i=1, 2, \dots, n-1)$ را ریشه‌های nام واحد (به‌جز خود ۱) فرض می‌کنیم. از برابری

$$x^n-1=(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})$$

نتیجه می‌شود که، به‌ازای هر مقدار i، داریم:

$$1+\omega_i+\omega_i^2+\dots+\omega_i^{n-1}=0$$

درضمن روشن است که $\omega_i^n=1$. اکنون ω_i را در اتحاد فرض قرارمی‌دهیم، برای هرمقدار i به‌دست می‌آید:

$$P_0(1)+\omega_i P_1(1)+\cdots+\omega_i^{n-2}P_{n-2}(1)=0$$

چون در معادلهٔ از درجهٔ $(n-2)$ام

$$P_0(1)+xP_1(1)+\cdots+x^{n-2}P_{n-2}(1)=0$$

$n-1$ مقدار متمایز ω_i صدق می‌کنند، بنابراین، این معادله یك اتحاد است و از آن‌جا

$$P_0(1)=P_1(1)=\cdots=P_{n-2}(1)=0$$

یعنی هر یك از چندجمله‌ای‌های $P_0(x)$، $P_1(x)$، ...، $P_{n-2}(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

۱۵. (۲/۱۹۷۳). دو دنبالهٔ $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ ازعددهای درست، به‌این صورت تعریف شده‌اند:

$$X_0=1,\ X_1=1,\ X_{n+1}=X_n+2X_{n-1}\quad (n=1,2,\ldots);$$

$$Y_0=1,\ Y_1=7,\ Y_{n+1}=2Y_n+3Y_{n-1}\quad (n=1,2,\ldots)$$

به‌این‌ترتیب، چندجملهٔ اول ازاین دنباله‌ها، چنین است:

$$X=1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11,\ 21,\ \ldots$$

$$Y=1,\ 7,\ 17,\ 55,\ 161,\ 487,\ \ldots$$

ثابت کنید، بین جمله‌های دو دنباله، جملهٔ مشترکی، به‌جز ۱، وجود ندارد.

حل. در هم‌نهشتی به‌مدول ۸، نتیجهٔ چندجملهٔ اول دودنباله، چنین می‌شود:

$$X:1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

$$Y:1,\ 7,\ 1,\ 7,\ 1,\ 7,\ \ldots$$

یك استقرای ساده نشان می‌دهد که، این رفتار ادامه دارد و، در X، ۳ و ۵ و در Y، ۱ و ۷، به‌تناوب ظاهر می‌شوند. به‌این‌ترتیب، عدد ۱، تنها جملهٔ مشترك دو دنباله است.

این گونه مساله‌ها را، درحالت کلی، به کمك معادله‌های تفاوتی حل می‌کنند

[برای آگاهی بیشتر دربارهٔ معادله‌های تفاوتی، شمارهٔ ۱۶ «آشتی با ریاضیات» (سال چهارم، شمارهٔ ۳، صفحهٔ ۲۲) را ببینید].

اگر a، b، $x_\circ$ و $x_۱$ عددهای مفروض باشند، و $x_۲$، $x_۳$، ... از رابطهٔ بازگشتی

$$x_{n+۱}=ax_n+bx_{n-۱}, \ (n=۱, ۲, \ldots)$$

معین شوند، و اگر $a^۲+۴b\neq\circ$، آن‌گاه x_n بر حسب a، b، $x_\circ$ و $x_۱$ از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$x_n=\frac{(x_۱-k_۱x_\circ)k_۲^n-(x_۲-k_۲x_\circ)k_۱^n}{k_۲-k_۱}$$

که‌در آن، $k_۱$ و $k_۲$، ریشه‌های‌معادلهٔ $k^۲-ak-b=\circ$ هستند (درحالتی‌که داشته‌باشیم $a^۲+۴b=\circ$ و $k_۱=k_۲$؛ دستور x_n به‌صورت دیگری‌درمی‌آید).

درمسالهٔما، برای‌معادلهٔاول داریم: $x_\circ=۱$، $x_۱=۱$، $a=۱$ و $b=۲$ (و در نتیجه $k_۱=۱$ و $k_۲=۲$) و به‌دست می‌آید:

$$x_n=\frac{۱}{۳}[۲^{n+۱}+(-۱)^n]$$

و برای معادلهٔ دوم:

$$y_n=۲\times ۳^n-(-۱)^n$$

به این‌ترتیب، برای رسیدن به‌برابری $x_n=y_m$ باید داشته باشیم:

$$۳^{m+۱}-۲^n=\frac{۱}{۲}[۳(-۱)^m+(-۱)^n]$$

اگر $n=\circ$ یا $n=۱$، می‌بینیم‌که $m=\circ$ تنهاجواب‌ممکن است. اگر $n\geqslant ۲$ بگیریم، وقتی‌که m و n هردو زوج یا هردو فرد باشند، سمت راست برابری بالا عددی زوج و سمت چپ آن عددی فرد می‌شود. و اگر m و n یکی زوج و دیگری فرد باشد، آن‌وقت، برابری نسبت به مدول ۴ نادرست می‌شود.

۰۱۱ (۳/۱۹۸۰). فرض کنید:

$$F_r = x^r \sin rA + y^r \sin rB + z^r \sin rC$$

که درآن، x، y، z، A، B، و C، عددهایی حقیقی‌اند و $A+B+C$ مضرب درستی ازعدد π است. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $F_1 = F_2 = 0$، آن‌گاه F_r، به‌ازای همهٔ مقدارهای درست و مثبت r، برابر صفر است.

حل. فرض کنید:

$$u = x(\cos A + i\sin A) = xe^{iA},\ v = y(\cos B + i\sin B) = ye^{iB},$$
$$w = z(\cos C + i\sin C) = ze^{iC}$$

و

$$G_r = u^r + v^r + w^r$$

بنابراین $G_0 = 3$ و $G_r = H_r + iF_r$، که در آن

$$H_r = x^r \cos rA + y^r \cos rB + z^r \cos rC$$

اگر $F_1 = F_2 = 0$، آن‌گاه G_1 و G_2 حقیقی‌انـد و تنها کافی است ثابت‌کنیم که G_r، به‌ازای ... ،۴ ،۳ $= r$ عددی حقیقی است.

معادلهٔ درجهٔسوم $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ را، باریشه‌های u، v و w درنظر می گیریم:

$$a = u + v + w = G_1,$$
$$2b = 2(vw + wu + uv) = (u+v+w)^2 - (u^2+v^2+w^2) =$$
$$= G_1^2 - G_2$$

بنابه‌فرض $A+B+C = k\pi$ (k عددی است درست)، بنابراین

$$C = uvw = xyz \cdot e^{ik\pi} = \pm xyz = \text{یك عددحقیقی}$$

اکنون، بـا استقرا نشان می‌دهیم، G_r، همواره حقیقی است (و ایـن، به معنای آن است که، F_r، همواره برابر صفر است). برای پیدا کردن یك

رابطهٔ بازگشتی برای G_r، $p(x)$ را در x^n ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{3+n}-ax^{2+n}+bx^{1+n}-cx^n=0, \quad (\text{برای } x=u, v, w)$$

به‌ترتیب، مقدارهای u، v و w را دراین معادله قرار می‌دهیم و، سپس، سه رابطهٔ حاصل‌را با هم جمع می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید:

$$G_{3+n}-aG_{2+n}+bG_{1+n}-cG_n=0$$

از آن‌جاکه $G_0=3$، G_1 و G_2 و c حقیقی‌اند، با توجه‌به‌این‌رابطهٔ‌بازگشتی، G_3 هم عددی حقیقی می‌شود؛ سپس با استقرا روشن می‌شود که G_4، G_5، ... بالاخره G_r (به‌ازای همهٔ مقدارهای طبیعی r) حقیقی است.

راه‌حل دوم. اگر چه این راه‌حل، به زیبایی راه‌حل قبلی نیست، ولی این ویژگی را داردکه راه‌حلی مستقیم است. سه‌حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول. $\sin A\sin B\sin C\neq 0$. از معادلهٔ $F_1=0$ به‌دست می‌آید:

$$z=\frac{x\sin A+y\sin B}{\sin C} \tag{1}$$

این مقدار z را در $F_2=0$ قرار می‌دهیم:

$$x^2\sin 2A+y^2\sin 2B+\frac{(x\sin A+y\sin B)^2}{\sin^2 C}\sin 2C=0$$

که با توجه به فرض $A+B+C=k\pi$ (k عـددی است درست)، بعد از تبدیل‌های لازم جبری و مثلثاتی، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\sin A\sin B[x^2+y^2-(-1)^k 2xy\cos C]=0$$

و چون $\sin A\sin B\neq 0$، بنابراین

$$x^2+y^2-(-1)^k 2xy\cos C=0 \tag{2}$$

اگر (۲) را معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به x در نظـر بگیریم، مبین آن برابر $-y^2\sin^2 C$ و، بنابراین غیر مثبت می‌شود؛ یعنی‌عبارت درجه‌دوم سمت‌چپ (۲) غیرمنفی است و تنها وقتی برابر صفر می‌شود که داشته باشیم:

$$x=y=0$$

در نتیجه، با توجه به (۱) به‌دست می‌آید: $z=0$. و این، نشان می‌دهد که، برای همهٔ rها، نه‌تنها F_r عددی درست است، بلکه $F_r=0$.

حالت دوم. درست یکی از مقدارهای $\sin A$، $\sin B$ یا $\sin C$ برابرصفر است.

فرض می‌کنیم $\sin A=0$. دراین صورت: A، مضرب‌درستی از πاست و در نتیجه، برای همهٔ مقدارهای درست r، داریم: $\sin rA=0$. چون $B+C=n\pi$، بنابراین

$$\sin B+(-1)^n\sin C=0,$$

$$\sin rB+(-1)^{rn}\sin rC=0 \qquad (۳)$$

و شرط $F_1=0$، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$F_1=y\sin B+z\sin C=(y-(-1)^n z)\sin B=0$$

چون $\sin B\neq 0$، بنابراین

$$y=(-1)^n z \qquad (۴)$$

و با توجه به (۳) و (۴)، برای هر مقدار r به‌دست می‌آید:

$$F_r=y^r\sin rB+z^r\sin rC=y^r\sin rB-$$
$$-(-1)^{rn}y^r(-1)^{rn}\sin rB=0$$

توجه کنید، دراین‌جا، تنها از $F_1=0$ استفاده کردیم.

حالت سوم. $\sin A=\sin B=\sin C=0$.

روشن است که در این حالت، بدون هیچ پیش‌فرضی، همیشه داریم: $F_r=0$.

تعمیم. فرض کنید $F_r=\sum x_i^r\sin rA_i$ که، در آن، x_i و A_i عددهایی حقیقی‌اند ($i=1, 2, \dots, n$) و $\sum A_i=n\pi$ (n، عددی است درست). اگر

$$F_1=F_2=\dots=F_{n-1}=0$$

آن‌وقت، برای همهٔ مقدارهای r، داریم: $F_r=0$.

اثبات را می‌توان شبیه راه‌حل اول مسالهٔ بالا آورد. فرض می‌کنیم:

$$u_j=x_je^{iA_j}\text{ ، }G_r=u_j^r$$

بنابراین، G_1، G_2، ...، G_{n-1} حقیقی‌اند. برای آن‌که ثابت کنیم، G_r، به‌ازای همهٔ مقدارهای r حقیقی است، این معادلهٔ درجهٔ n را در نظر می‌گیریم:

$$x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^na_n=0 \qquad (5)$$

و ریشه‌های آن‌را u_1، u_2، ...، u_n می‌گیریم. چون $u_1u_2\ldots u_n$ حقیقی است، با توجه به‌دستور نیوتون (مسالهٔ ۵را در همین بخش ببینید) معلوم می‌شود که همهٔ a_jها، حقیقی‌اند. ریشه‌ها را بـه ترتیب در معادلهٔ (۵) قرار می‌دهیم و، سپس، برابری‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم و، باروش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم که G_r، برای همهٔ مقدارهای r، حقیقی است.

۱۲. (۲/۱۹۸۲). x و y و z را عددهای حقیقی و

$$S_r=x^r+y^r+z^r$$

می‌گیریم. به‌شرط $S_1=0$، معادلهٔ

$$\frac{S_{m+n}}{m+n}=\frac{S_m}{m}\cdot\frac{S_n}{n} \qquad (*)$$

برای عددهای درست m و n، جواب‌هایی دارد، مثلاً

$$(m،n)=(2،3)،(3،2)،(2،5)،(5،2)$$

دوتایی‌های درست دیگر $(m،n)$ را، درصورت وجود، پیدا کنید، به‌نحوی‌که‌در معادلهٔ (*) برای عددهای حقیقی x و y و z، باشرط $x+y+z=0$ صدق کنند.

حل. ثابت می‌کنیم که (*) برای دوتایی‌های دیگری، غیر از آن‌چـه درصورت مساله داده شده است، درست نیست.

a) m و n مقدارهایی مثبت‌اند (بنا به‌تعریف S_m و S_n)؛

b) m و n باهم نمی‌توانند فرد باشند، زیرا، در غیر این‌صورت، با فرض $(x، y، z)=(۱، -۱، ۰)$، داریم: $S_{m+n}=۲$ ، $S_m=S_n=۰$ که معادلهٔ (*) را نقض می‌کند؛

c) m و n هردو، نمی‌توانند زوج باشند، زیرا در این مورد هم، اگر فرض کنیم: $(x،y،z)=(۱، -۱، ۰)$، به‌دست‌می‌آید: $S_{m+n}=S_m=S_n=۲$ و معادلهٔ (*) را به‌صورت $\frac{۲}{m+n}=\frac{۲}{m}\cdot\frac{۲}{n}$ یا $(n-۲)(m-۲)=۴$ درمی‌آورد، یعنی $m=n=۴$. ولی، به‌ازای‌این‌مقدارها $\frac{S_۴}{۴}\cdot\frac{S_۴}{۴}\neq\frac{S_۸}{۸}$؛

d) به‌این ترتیب، از دو عدد m و n، یکی زوج و دیگری فرد است، مثلاً m را فرد و n را زوج می‌گیریم. در حالت $n=۲$، برای $(x، y، z)=(۲، -۱، -۱)$، معادلهٔ (*) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(m-۶)۲^m=-۴m-۱۲$$

این‌معادله دوجواب $m=۳$ و $m=۵$ دارد و این‌ها، همان جواب‌هایی‌هستند که درصورت مساله داده‌شده‌اند. برای $m\geqslant ۷$، دوطرف‌معادله، باعلامت‌های مختلف به‌دست می‌آیند و، بنابراین، جوابی برای معادله پیدا نمی‌شود. در حالت $n\geqslant ۴$ نشان‌می‌دهیم که‌معادلهٔ (*)، به‌ازای $(x،y،z)=(۲، -۱، -۱)$ غیرممکن است. دراین‌حالت، معادلهٔ (*) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(۲^{m+n}-۲)(mn-m-n)=(m+n)(۲^{m+۱}-۲^{n+۱}-۲) \quad (۱)$$

چون $mn-m-n>۰$، هر یك از چهار عامل داخل پرانتزها، باید مثبت باشند برای این منظور، باید داشته باشیم $m>n$، یعنی $m\geqslant ۵$. چون

$$(m+n)(۲^{m+۱}-۲^{n+۱}-۲)<(m+n)(۲^{m+n}-۲)$$

نتیجه می گیریم: $mn-m-n<m+n$ یا $(m-۲)(n-۲)<۴$؛ واین ممکن نیست زیرا $m\geqslant ۵$ و $n\geqslant ۴$.

اگرشرط $xyz\neq ۰$ را به‌مساله اضافه کنیم، بادشواری بیشتری‌روبه‌رو

می‌شویم، زیرا دراین‌صورت، بایدمقدارهای منفی n و m را هم‌درنظر بگیریم. دوتایی‌های قبلی برای $(m، n)$ همچنان معتبرند و تجزیه و تحلیل مساله، شبیه قبل است. ولی با بحثی طولانی‌تر، می‌توان نشان‌داد که تنها دوتایی‌های ممکن دیگر برای (*)، عبارت است از:

$$(m، n)=(۳، -۱) \text{ یا } (-۱، ۳)$$

یعنی

$$\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۲}=\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{۳}\cdot\frac{y^{-۱}+y^{-۱}+z^{-۱}}{-۱} \qquad (۲)$$

فرض‌کنید $x+y+z=\circ$ و $xyz\neq\circ$. برای اثبات درستی برابری (۲) توجه می‌کنیم که

$$\Sigma x^۲=-۲\Sigma yz، \Sigma x^۳=۳xyz، \Sigma x^{-۱}=\Sigma\frac{yz}{xyz}$$

دراین‌جاراه‌حل جالبی رامی‌آوریم که به‌وسیلهٔ پترلاکس (Peter Lax) ارائه شده است.

به‌جای z مقدار آن‌را $-(x+y)$ قرار می‌دهیم و $\xi=\frac{x}{y}$ می‌گیریم.

بنابراین

$$S_r(x، y، z)=y^r\cdot P_r(\xi) \qquad (۱)'$$

که در آن، $P_r(\xi)$، یك چندجمله‌ای به‌صورت زیر است:

$$P_r(\xi)=\xi^r+۱+(-۱)^r(۱+\xi)^r \qquad (۲)'$$

S_r نسبت به x و y و z متقارن است، یعنی ضمن تبدیل‌های x و y و z به یکدیگر، تغییرنمی‌کند، بنابراین P_r هم، ضمن تبدیل‌های زیر، بی‌تغییرمی‌ماند:

$$\begin{aligned} P(\xi) &\rightarrow P(-\xi-۱) \\ P(\xi) &\rightarrow \xi^r P\left(\frac{۱}{\xi}\right) \end{aligned} \qquad (۳)$$

البته، هر ترکیبی از این نگاشت‌ها هم، پایدار است.

به‌این‌ترتیب، با توجه بـه (۳)، اگر ρ جوابی از P باشد، آن‌وقت، $\rho-۱-$ و $\frac{۱}{\rho}$ هم جواب‌هـایی از P هستند. یعنی، مجموعهٔ جواب، ضمن هریك از نگاشت‌های زیر بی‌تغییر می‌ماند:

$$\rho \to -\rho-۱،\ \rho \to \frac{۱}{\rho},\ \rho \to -\frac{۱}{\rho}-۱،$$
$$\rho \to -\frac{۱}{\rho+۱},\ \rho \to \frac{-\rho}{۱+\rho} \qquad (۴)$$

سه نگاشت آخر، از ترکیب دو نگاشت اول به‌دست آمده‌اند. این نگاشت‌ها، همراه بـا نگاشت همانی، گروهی همسان (ایزومورف) با گروه تبدیل‌های سه‌عضوی می‌سازند.

اگر درجهٔ P کمتر از ۶ باشد، کمتر از ۶ جواب دارد. بنابراین، یکی از جـواب‌های ρ، باید بر یکی از تصویرهای خـودش در تبدیل‌های (۴) منطبق باشد، یعنی باید یکی از برابری‌های زیر برقرار باشد:

A: $\rho=-\rho-۱،\ \rho=-\frac{۱}{۲};$

B: $\rho=\frac{۱}{\rho},\ \rho=۱$ یا $\rho=-۱;$

C: $\rho=-\frac{۱}{\rho}-۱،\ \rho^{۲}+\rho+۱=۰;$

D: $\rho=-\frac{۱}{\rho+۱},\ \rho^{۲}+\rho+۱=۰;$

E: $\rho=-\frac{\rho}{۱+\rho},\ \rho=۰;$

درحالت A: $\{1، 2- ، -\frac{1}{2}\}$ متناظر با ریشه‌ها در B_+ هستند. چندجمله‌ای با این ریشه‌ها، به‌صورت زیر است:

$$Q_1(\xi)=(2\xi+1)(\xi+2)(\xi-1)=2\xi^3+3\xi^2-3\xi-2$$

که ضمن نگاشت‌های (۳) بی‌تغییر می‌ماند. به‌این ترتیب، چندجمله‌ای

$$Q_2(\xi)=\xi^2+\xi+1$$

متناظر با حالت‌های C و D، و چندجمله‌ای

$$Q_3(\xi)=\xi^2+\xi$$

متناظر با حالت‌های B_- و E است.

از این‌جامعلوم می‌شود که، هرچندجمله‌ای بی‌تغییر P با درجهٔ کمتر از ۶، دارای ریشه‌های مشترك با Q_1، Q_2 و Q_3 است و، بنابراین، همهٔ این ریشه‌ها را دارد؛ یعنی P باید بـر چندجمله‌ای‌های Q_1، Q_2 و Q_3 بخش‌پذیر باشد.
از آن‌جا که، نسبت $\frac{P}{Q_i}$ هم، بی‌تغییرو از درجهٔ کمتر از۶است، P به‌صورت حاصل‌ضربی از Q_iهاست. در ضمن توجه کنیم کـه چندجمله‌ای بی‌تغییر P وقتی، و تنها وقتی، بر Q_3 بخش‌پذیر است که در $\xi=0$ به‌صفر برسد.

اکنون P_r را از(۲)، به‌ازای ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ $=r$، محاسبه‌می‌کنیم.داریم:

$$P_2=2Q_2،\ P_3=-3Q_3،\ P_4=2Q_2^2،\ P_5=-5Q_2Q_3 \qquad (5)$$

P_6 از درجهٔ ششم است و بر هیچ‌کدام ازQها بخش‌پذیر نیست. چندجمله‌ای

$$P_7(\xi)=-7(\xi^6+3\xi^5+5\xi^4+5\xi^3+3\xi^2+\xi)$$

به‌ازای $\xi=0$ و $\xi=-1$ برابر صفر می‌شود. بنابراین شامل‌همهٔ ریشه‌های Q_3 و بر Q_3 بخش‌پذیر است. نسبت $\frac{P_7}{Q_3}$ ازدرجهٔ۴می‌شود و به‌ازای $\xi=0$ برابر صفر نمی‌شود. بنابراین باید مضرب ثابتی از مربع Q_2 باشد:

$$P_7=-7Q_3Q_2^2 \qquad (5)'$$

رابطه‌های (۵) و $'$(۵)، همهٔ اتحادهای ممکن برای S_r را نتیجه می‌دهند.

P را بی‌تغییر، از درجه nام و باریشه‌های ρ_1، ρ_2، ...، ρ_n می‌گیریم. تبدیل‌های (۴)، این‌ریشه‌هارا تغییر می‌دهندو، بنابراین، آن‌ها را، به‌گروه‌های ۶تائی، سه‌تائی یا دوتائی تقسیم می‌کنند. به‌خصوص، اگر $n \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۶)$ دست‌کم دوگروه دوتائی وجود دارد، یعنی، بر Q_2 یا Q_3 بخش‌پذیراست.

این نتیجه‌ها را، برای P_r، در نظر می‌گیریم. چون برای r زوج، P_r از درجهٔ r ام است و به ازای $\xi = ۰$ برابر صفر نمی‌شود؛ با توجه به (۵) داریم:

$$(۶)\quad \begin{cases} \text{برای } r \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۶)\text{:}\ P_r \text{ بر } \frac{۱}{۲} P_2 \text{ بخش‌پذیر است؛} \\ \text{برای } r \equiv ۴ (\mathrm{mod}\ ۶)\text{:}\ P_r \text{ بر } \frac{۱}{۴} P_2^2 \text{ بخش‌پذیر است.} \end{cases}$$

وقتی r فرد باشد، P_r از درجهٔ $(r-۱)$ام است و $\rho = ۰$، ریشهٔ ساده‌ای‌از آن است و، بنابراین، بر Q_3 بخش‌پذیر می‌شود. با استفاده از (۵) و $'$(۵) داریم:

$$(۶)'\quad \begin{cases} \text{برای } r \equiv ۳ (\mathrm{mod}\ ۶)\text{:}\ P_r \text{ بر } \frac{۱}{۳} P_3 \text{ بخش‌پذیر است؛} \\ \text{برای } r \equiv ۵ (\mathrm{mod}\ ۶)\text{:}\ P_r \text{ بر } \frac{۱}{۵} P_5 \text{ بخش‌پذیر است؛} \\ \text{برای } r \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ ۶)\text{:}\ P_r \text{ بر } \frac{۱}{۷} P_7 \text{ بخش‌پذیر است.} \end{cases}$$

توجه کنیم که $\frac{P_j}{j}$ دارای‌ضریب‌های‌درست‌است و، به‌ازای $j = ۲، ۳، ۵، ۷$، بزرگترین‌ضریب $\frac{P_j}{j}$ برابر ± ۱ است. با توجه‌به‌این که P_r دارای ضریب‌های درست است، P_r بر $\frac{P_j}{j}$ بخش‌پذیراست و درخارج‌قسمت، ضریب‌های‌درست

به‌دست می‌آید.

با توجه به‌این نکته‌ها، همراه با (۶) و $'$(۶)، و با استفاده از $'$(۱) در رابطه با P_r و S_r، می‌توان ویژگی‌های زیر را، در بخش‌پذیری عددهای درست، نتیجه گرفت.

x و y و z را عددهای درست می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x+y+z=\circ$؛ دراین‌صورت

برای $r\equiv ۲ (\mathrm{mod}\ ۶)$: $S_r(x، y، z)$ بر $\frac{۱}{۲}S_۲(x، y، z)$ بخش‌پذیر است؛

برای $r\equiv ۴ (\mathrm{mod}\ ۶)$: S_r بر $\frac{۱}{۴}S_۲^۲(x، y، z)$ بخش‌پذیر است؛

برای $r\equiv ۳، ۵$ یا $۱ (\mathrm{mod}\ ۶)$: $S_r(x، y، z)$، به‌ترتیب، بر $\frac{۱}{۳}S_۳(x، y، z)$، $\frac{۱}{۵}S_۵(x، y، z)$ و $\frac{۱}{۷}S_۷(x، y، z)$ بخش‌پذیر است.

تمرین ۱. ثابت کنید، اگر $P(\xi)$، یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۶ و ضمن تبدیل‌های

$$P(\xi)\rightarrow P(-\xi-۱)، P(\xi)\rightarrow \xi^۶ P\left(\frac{۱}{\xi}\right) \qquad (۷)$$

بی‌تغییر و ضریب بزرگترین درجه آن واحد باشد، آن‌وقت P به صورت زیر است

$$P(\xi)=\xi^۶+۳\xi^۵+a\xi^۴+(۲a-۵)\xi^۳+a\xi^۲+۳\xi+۱ \qquad (۷)'$$

و برعکس، هرچندجمله‌ای P به‌صورت $'$(۷)، ضمن تبدیل‌های (۷) بی‌تغییر می‌ماند.

تمرین ۲. $P_{۱۲}$ را از رابطهٔ (۲) محاسبه کنید و آن را به ضرب دو چندجمله‌ای به‌صورت $'$(۷) تجزیه کنید.

یادداشت. نتیجه‌هـای بخش‌پذیری (۶) و '(۶) را، می‌توان بـه‌طور مستقیم، از دستورهای زیر (که در سال ۱۹۸۳ به‌وسیلهٔ Leren C. Larson ارائه شده است)، نتیجه گرفت:

$$S_m = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{3}]} \frac{2m}{m-k} C_{m-k}^{2k} X^{m-3k} Y^{2k}$$

$$S_{m+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{m-1}{3}]} \frac{2m+1}{2k+1} C_{m-k-1}^{2k} X^{m-3k-1} Y^{2k+1}$$

که در آن $X = \frac{1}{2}S_2$ و $Y = \frac{1}{3}S_3$.

۰۱۳ (۵ / ۱۹۸۴). $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $3n$ است و می‌دانیم:

$$P(0) = P(3) = \dots = P(3n) = 2,$$

$$P(1) = P(4) = \dots = P(3n-2) = 1,$$

$$P(2) = P(5) = \dots = P(3n-1) = 0$$

$$P(3n+1) = 730$$

مطلوب است محاسبهٔ n.

حل. توجه می‌کنیم که، وقتی x مقدارهای از ۰ تا $3n$ را پله‌به‌پله، طی کند، مقدار $P(x) - 1$، در یک گردش دوری، مقدارهای ۱، ۰، ۱ —، ۱، ۰، ۱ —، ... را می‌پذیرد. برای این که این رفتار را روشن کنیم، $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ را، که یکی از کعب‌های واحد است، در نظر می‌گیریم. می‌بینیم:

$$\{\omega^n\} = \{1, \omega, \omega^2, 1, \omega, \omega^2, \dots\}$$

$$\left\{\frac{2I_m\omega^n}{\sqrt{3}}\right\} = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, \dots\}$$

$$\left\{\frac{2I_m(\omega^{2n+1})}{\sqrt{3}}\right\} = \{1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots\}$$

بنا بر این، به‌ازای $x=0, 1, 2, \ldots, 3n$ داریم:

$$P(x)-1=\frac{2I_m\omega^{2x+1}}{\sqrt{3}}$$

و بنا بر قضیهٔ دوجمله‌ای

$$\omega^{2x}=\{1+(\omega^2-1)\}^x=\sum_{k=0}^{x}C_x^k(\omega^2-1)^k \qquad (*)$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$Q(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}I_m\left\{\omega\sum_{k=0}^{3n}C_x^k(\omega^2-1)^k\right\}$$

توجه‌داریم که، برای $x<k$ داریم: $C_x^k=0$، بنا بر این $Q(x)$، برای $3n+1$ مقدار، به‌ازای $x=0, 1, 2, \ldots, 3n$، با $P(x)-1$ متحد است. و چون $P(x)-1$ و $Q(x)$، هر دو از درجهٔ $3n$ هستند، داریم:

$$P(x)-1\equiv Q(x)$$

با استفاده از $(*)$ برای $x=3n+1$، به دست می‌آید:

$$P(3n+1)-1=\frac{2}{\sqrt{3}}I_m\left\{\omega\sum_{k=0}^{3n}C_{3n+1}^k(\omega^2-1)^k\right\}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}I_m\{\omega(\omega^{2(3n+1)}-(\omega^2-1)^{3n+1}\}$$

چون $I_m(\omega^{6n+3})=0$ و $\omega^2-1=i\omega\sqrt{3}$

$$P(3n+1)-1=-2R_e\{\omega^2(i\sqrt{3})^{3n}\}=$$

$$=\begin{cases}(-1)^k.3^{3k} & (n=2k)\\(-1)^k.3^{3k+2} & (n=2k+1)\end{cases}$$

سرانجام، چون $P(3n+1)-1=729=3^6$، به‌دست می‌آید: $n=4$.

یادداشت. به‌طور کلی اگر $P(x)$، بـه‌ازای $x=0, 1, 2, \ldots, 3n$،

به‌صورت‌دوری، مقدارهای a، b، c، a، b، c، ...، a را قبول کند، آن‌وقت به‌ازای $x=$ ۰، ۱، ۲، ...، $3n$ داریم:

$$P(x)=A+B\omega^{x}+C\omega^{2x}$$

ثابت‌های A، B و C را می‌توان باقراردادن $x=$ ۰ ، ۱ ، ۲ پیدا کرد و، سپس مثل قبل، با استفاده از رابطه‌های زیر عمل کرد:

$$\omega^{x}=\{1+(\omega-1)\}^{x},\ \omega^{2x}=\{1+(\omega^{2}-1)\}^{x}$$

به‌همین ترتیب، اگر $P(x)$ دارای دور $x=$ ۰، ۱، ۲، ...، rn ازمرتبه r باشد باید از ریشه‌های mام واحد استفاده کرد.

راه‌حل دوم. $Q(x)=P(x)-1$ مـــی گـیـریـــم مـجـمـوع $\sum_{k=0}^{3n+1}(-1)^{k}C_{3n+1}^{k}Q(k)$ برابر صفر می‌شود، چون $(3n+1)$ امین تفاضل محدود از چند جمله‌ای درجهٔ $(3n)$ام است؛ برای $Q(3n+1)$حل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$Q(3n+1)=\sum_{k=0}^{3n}(-1)^{k}C_{3n+1}^{k}Q(k)=\sum_{k=0}^{3n+1}A_{k}C_{3n+1}^{k}$$

که درآن $A_{k}=$ ۱، ۰، ۱ −، ۱ −، ۰، ۱، بسته به‌این‌که، نسبت به مدول ۶ داشته باشیم: $k=$ ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵. مجموع قبل را می‌توانیم بااستفاده‌از ریشه‌های‌واحدپیداکنیم. مثلاً، اگر بدانیم $F(x)=a_{0}+a_{1}x+\dots+a_{n}x^{n}$ آن‌وقت‌مجموع $a_{0}+a_{3}+a_{6}+\dots$ ازعبارت $\frac{1}{3}[F(1)+F(\omega)+F(\omega^{2})]$ به‌دست می‌آیدکه، درآن، ω عبارت است از ریشهٔ واحد. بنابراین، ازرابطهٔ زیر آغاز می‌کنیم:

$$(1+x)^{3n+1}=\sum_{k=0}^{3n+1}C_{3n+1}^{k}x^{k}$$

به‌دست می‌آید:

$$6Q(3n+1)=\Sigma(1+r_{i})^{3n+1}\{1-r_{i}^{-2}-r_{i}^{-3}+r_{i}^{5}\}$$

که در آن، مجموع، عبارت است از توان‌های ششم ریشه‌های واحد. چون $r_i^6=1$ بنابراین

$$6Q(3n+1)=\Sigma(1+r_i)^{3n+1}\{1+r_i\}\{1-r_i^3\} \qquad (1)$$

ریشه‌های ششم واحد، شامل سه‌ریشه سوم ۱ وسه‌ریشهٔ سوم ۱ — است.مجموع همهٔ ریشه‌های سوم واحد در (۱)، برابرصفر است. درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$3Q(3n+1)=[(1+r_1)^{3n+2}+(1+r_2)^{3n+2}]$$

که‌درآن $r_1=e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $r_2=e^{-\frac{i\pi}{3}}$. سپس‌چون

$$1+r_1=2e^{\frac{i\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{6},\ 1+r_2=2e^{-\frac{i\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{6}$$

بنابراین
$$3Q(3n+1)=3^{\frac{3n+2}{2}}\{e^{i\pi\frac{3n+2}{6}}+e^{-i\pi\frac{3n+2}{6}}\}$$

و سرانجام
$$3^7=3Q(3n+1)=2\times 3^{\frac{3n+2}{2}}.\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

و چون n باید زوج باشد، بنابراین $n=4$.

نظریهٔ عددها

---

۰۱ (۱/۱۹۷۲). نمادهای

$$(a, b, \dots, g), [a, b, \dots, g]$$

را به‌ترتیب، به‌معنای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عددهای درست و مثبت a، b، ...، g می‌گیریم. مثلاً

$$(3, 6, 18)=3;\ [6, 15]=30$$

ثابت کنید:

$$\frac{[a، b، c]^{۲}}{[a، b][b، c][c، a]}=\frac{(a، b، c)^{۲}}{(a، b)(b، c)(c، a)}$$

حل. تجزیهٔ عددهای a و b و c را، به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$a=\prod p_i^{\alpha_i}\ ،\ b=\prod p_i^{\beta_i}\ ،\ c=\prod p_i^{\gamma_i}$$

که در آن، p_iها، به‌معنای عامل‌های اول سه‌عدد a، b و c هستند (بعضی نماها می‌توانند صفر باشند). چون داریم:

$$[a،b]=\prod p_i^{\max\{\alpha_i\ ,\ \beta_i\}}\ \text{و}\ (a،b)=\prod p_i^{\min\{\alpha_i\ ,\ \beta_i\}}$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$۲\max\{\alpha_i، \beta_i، \gamma_i\}-\max\{\alpha_i، \beta_i\}-\max\{\beta_i، \gamma_i\}-$$
$$-\max\{\gamma_i، \alpha_i\}=۲\min\{\alpha_i، \beta_i، \gamma_i\}-\min\{\alpha_i، \beta_i\}-$$
$$-\min\{\beta_i، \gamma_i\}-\min\{\gamma_i، \alpha_i\}$$

بدون این‌که لطمه‌ای به کلی‌بودن مساله وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$\alpha_i\geqslant\beta_i\geqslant\gamma_i$$

دراین صورت، برابری بالا، به صورت اتحاد زیر درمی‌آید که درستی آن روشن است:

$$۲\alpha_i-\alpha_i-\beta_i-\alpha_i=۲\gamma_i-\beta_i-\gamma_i-\gamma_i$$

برای بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترک و کوچکترین مضرب‌مشترک، قانون‌های زیر وجود دارد:

۱. $(a، a)=a$، $[a، a]=a$؛

۲. قانون جابه‌جائی: $(a، b)=(b، a)$، $[a، b]=[b، a]$؛

۳. قانون شرکت‌پذیری:

$$((a، b)، c)=(a، (b، c))،\ [[a، b]، c]=[a، [b، c]]$$

۴. $(a, [a, b]) = a$؛ $[a, (a, b)] = a$.

درستی این ویژگی‌ها، به‌سادگی، و بااستفاده از ویژگی‌های ماکزیمم و می‌نیمم ثابت می‌شود:

۱. $\max(a, a) = a$، $\min(a, a) = a$؛

۲. $\max(a, b) = \max(b, a)$، $\min(a, b) = \min(b, a)$؛

۳. $\max\{\max(a, b), c\} = \max\{a, \max(b, c)\}$ و

$\min\{\min(a, b), c\} = \min\{a, \min(b, c)\}$

۴. $\max\{a, \min(a, b)\} = a$؛ $\min\{a, \max(a, b)\} = a$.

این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که، عمل روی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک را، می‌توان با عمل max و min عوض کرد. همچنین، عمل‌های $\bigcup$ (اجتماع) و $\bigcap$ (اشتراک) در نظریهٔ مجموعه‌ها هم، با قانون‌های فوق سازگارند. این‌عمل‌ها، حالت‌های‌خاصی از سیستم‌هایی به‌نام شبکه‌ها هستند که درکتاب‌های جبر مدرن دربارهٔ آن‌ها صحبت می‌شود.

تمرین. با استفاده از روشی که برای حل این مساله به‌کاربردیم، درستی این اتحادها را ثابت کنید:

I_1: $$(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$$
$$[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$$

I_2: $$([a, b], [b, c], [c, a]) = [(a, b), (b, c), (c, a)]$$

I_3: $$(ab, cd) = (a, c)(b, d)\left(\frac{a}{(a, c)}, \frac{d}{(b, d)}\right)\left(\frac{c}{(a, c)}, \frac{b}{(b, d)}\right)$$

I_4: $$a_1 a_2 \cdots a_n = G_r L_{n-r}$$

که‌در آن، G_r، بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترک‌همهٔ‌حاصل‌ضرب‌های a_iها که هر بار rتا انتخاب شوند، وL_{n-r}، کوچکترین مضرب مشترک همهٔ حاصل‌ضرب‌های a_iها، که هر بار $n-r$بار انتخاب شوند، می‌باشند.

۲. (۱۹۷۶/۳). همهٔ جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$$

حل. a و b و c را غیرمنفی می‌گیریم و، به‌کمك هم‌نهشتی‌های به‌مدول ۴، ثابت می‌کنیم، تنها به‌حالتی باید بپردازیم که هرسه عدد a و b و c زوج باشند. ابتدا توجه می‌کنیم که برای عددهای زوج و عددهای فرد داریم:

$$(2m)^2\equiv 0 \pmod 4,\ (2m+1)^2\equiv 1 \pmod 4$$

حالت اول، وقتی که هرسه عدد a و b و c فرد باشند. در این حالت داریم:

$$a^2+b^2+c^2\equiv 3 \pmod 4,\ a^2b^2\equiv 1 \pmod 4$$

حالت دوم، وقتی که یکی از سه‌عدد a و b و c زوج و دوتای دیگر فرد باشند. دراین‌صورت داریم:

$$a^2+b^2+c^2\equiv 2 \pmod 4,\ a^2b^2\equiv 0 \text{ یا } 1 \pmod 4$$

حالت سوم، وقتی‌که یکی از عددهای a و b و c فرد و دوتای دیگر زوج باشند. در این حالت داریم:

$$a^2+b^2+c^2\equiv 1 \pmod 4,\ a^2b^2\equiv 0 \pmod 4$$

به‌این‌ترتیب، تنهایك‌حالت باقی‌می‌ماند: وقتی‌که هرسه‌عدد a و b و c زوج باشند. $a=2a_1$، $b=2b_1$، $c=2c_1$ می‌گیریم؛ به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=4a_1^2b_1^2 \quad (a_1\leqslant a,\ b_1\leqslant b,\ c_1\leqslant c)$$

چون $4a_1^2b_1^2\equiv 0 \pmod 4$، بنابراین، عددهای a_1، b_1 و c_1 هم باید زوج باشند. فرض می‌کنیم $a_1=2a_2$، $b_1=2b_2$ و $c_1=2c_2$، به‌دست می‌آید:

$$16a_2^2b_2^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2$$

بازهم به‌این نتیجه می‌رسیم که a_2، b_2 و c_2 باید زوج باشند و درنتیجه

$$64a_3^2b_3^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2$$

که در آن $a=8a_3$، $b=8b_3$ و $c=8c_3$. اگر ایـن روند را ادامه دهیم،

به‌این‌نتیجه می‌رسیم که باید a و b و c، بر هر توان دلخواهی از ۲ بخش‌پذیر باشند. یعنی تنها جواب ممکن، عبارت است از $a=b=c=0$. این راه‌حل نمونه‌ای است از روش نزول نامتناهی فرما.

با همین روش، می‌توان ثابت‌کرد که معادله‌های دیوفانتی زیر، به‌جز جواب‌های صفر، جواب دیگری ندارند:

$$x^2+y^2+z^2=x^2y^2z^2 \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2=2xyz \qquad (2)$$

$$x^2+y^2+z^2+w^2=2xyzw \qquad (3)$$

برای حالت کلی معادلهٔ (۱)، یعنی

$$x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r=x_1^r\cdot x_2^r\cdots x_n^r \quad (2<n<2^r) \qquad (4)$$

روش نزول نامتناهی مناسب نیست و بهتر است از نابرابری‌ها استفاده‌کنیم.

اگر فرض‌کنیم $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$، آن‌وقت باید داشته‌باشیم:

$$nx_n^r\geqslant x_1^rx_2^r\cdots x_n^r$$

و این نابرابری تنها وقتی برقرار است‌که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$$

بنابراین، معادلهٔ (۴)، جواب مثبت و درست ندارد.

می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=kxyz$، تنها به‌ازای $k=1$ و $k=3$ جواب‌های مثبت و درست دارد.

۰۳ (۱/۱۹۷۹). همهٔ جواب‌های درست و غیرمنفی

$$(n_1, n_2, \ldots, n_{14})$$

را، درصورت وجود، در معادلهٔ دیوفانتی

$$n_1^4+n_2^4+\cdots+n_{14}^4=1599$$

پیدا کنید، جواب‌هایی را کـه از تبدیل یکدیگر به‌دست می‌آیند، یک جواب به‌حساب آورید.

حل. ثابت می‌کنیم، معادله جواب ندارد و، برای این‌منظور، مثل‌مسالهٔ قبل، از هم‌نهشتی‌ها استفاده می‌کنیم (هم‌نهشتی به‌مدول ۱۶). داریم:

$$(2n)^4 \equiv 0 \pmod{16},\ (2n+1)^4 \equiv 8n(n+1)+1 \equiv 1 \pmod{16}$$

بنابراین $\sum_{1}^{14} n_i^4$ در تقسیم بر ۱۶، به‌یکی از باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۲، ...، ۱۴ می‌رسد و، درضمن $1599 \equiv 15 \pmod{16}$.

کلید حل این‌گونه مساله‌ها، یافتن مدول مناسب در هر مساله است.

۴. (۱۹۸۵/۱). ثابت کنید، در هرحال، برای دستگاه معادله‌های

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{1985}^2=y^3$$
$$x_1^3+x_2^3+\dots+x_{1985}^3=z^2$$

جواب درست ومثبت‌وجوددارد. عددهای x_1، x_2، ...، x_{1985}، درست‌ومتمایزند.

حل. ثابت می‌کنیم، درحالت کلی، دستگاه معادله‌های

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=y^3 \qquad (n, 1, 2, 3, \dots)$$
$$x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3=z^2$$

جواب درست و مثبت دارند. فرض می‌کنیم:

$$s=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2,\ t=a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3$$

که در آن، a_1، a_2، ...، a_n، مجموعه‌ای از عددهای درست و مثبت است. عددهای‌درست‌ومثبت m و k را جست‌وجو می‌کنیم، به‌نحوی که $x_i=s^m t^k a_i$ در معادله‌های دستگاه صدق کنند، یعنی

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=s^{2m+1}t^{2k}=y^3$$
$$x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3=s^{3m}t^{3k+1}=z^2$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$2m+1 \equiv 2k \equiv 0 \pmod{3},\ 3m \equiv 3k+1 \equiv 0 \pmod{2}$$

و این رابطه‌ها، برای $m \equiv 4 \pmod{6}$ و $k \equiv 3 \pmod{6}$ برقرارند.

از این روش، برای دستگاه‌های دیگری هم می‌توان استفاده کرد.

تمرین. ثابت کنید، دستگاه معادله‌های زیر، بی‌نهایت جواب درست و مثبت دارد:

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=a^5$$
$$x_1^3+x_2^3+\dots+x_n^3=b^2,$$
$$x_1^5+x_2^5+\dots+x_n^5=c^3,$$

۰۵ (۳/۱۹۷۸). عدد درست n را «خوب» می‌نامیم، وقتی‌که بتوان آن‌را به‌صورت زیر نوشت:

$$n=a_1+a_2+\dots+a_k$$

که درآن a_1، a_2، ...، a_k، عددهای درست و مثبت‌اند (لزومی ندارد متمایز باشند) و در برابری زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_k}=1$$

می‌دانیم، عددهای ۳۳ تا ۷۳ عددهای «خوب»‌اند. ثابت‌کنید، هرعدد درست بزرگتر از ۳۳، عددی «خوب» است.

حل. به کمک عدد خوب n، می‌توان عددهای خوب بزرگتر $2n+8$ و $2n+9$ را به‌دست‌آورد. فرض می‌کنیم $n=a_1+a_2+\dots+a_k$ عددی خوب باشد، بنابراین

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\dots+\frac{1}{2a_k}=\frac{1}{2}$$

وچون $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$، هریک از دوعدد

$$2n+8=4+4+2a_1+2a_2+\dots+2a_n,$$
$$2n+9=3+6+2a_1+2a_2+\dots+2a_n$$

عددی «خوب» از آب درمی‌آیند. به‌این ترتیب

اگر n عددی خوب باشد، عددهای $۲n+۸$ و $۲n+۹$ هم عددهایی خوب‌اند.

از خوب بودن عـدد ۳۳، معلوم می‌شود کـه عددهای ۷۴ و ۷۵ هم خوب‌اند. به همین ترتیب با توجه به‌فرض مساله که، عددهای از ۳۳ تا ۷۳ خوب‌اند، خوب بودن عددهای از۷۴ تا ۱۵۵ را نتیجه می‌گیریم و ازخوب‌بودن عددهای اخیر، خوب بودن عددهای از ۱۵۶ تـا ۳۱۹ نتیجه می‌شود و غیره.

۰۶ (۵/۱۹۷۳). ثابت‌کنید،ریشه‌های‌سوم‌سه‌عدداول‌متمایز،نمی‌توانند سه‌جمله ازیك تصاعد حسابی باشند (لزومی ندارد، این سه‌جمله، جمله‌های متوالی تصاعد باشند).

حل. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، این سه‌عـدد، بتوانند سه‌جمله از یك تصاعد حسابی باشند. یعنی داشته باشیم:

$$\sqrt[3]{p}=a،\ \sqrt[3]{q}=a+md،\ \sqrt[3]{r}=a+nd$$

که در آن‌ها، p، q و r عددهای اول متمایز، و m و n عددهـایی درست‌اند. اگر a و d را حذف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}}=\frac{m}{n}$$

یا

$$m\sqrt[3]{r}-n\sqrt[3]{q}=(m-n)\sqrt[3]{p} \qquad (۱)$$

دوطرف برابری (۱) را به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$m^۳r-n^۳q-۳mn\sqrt[3]{rq}(m\sqrt[3]{r}-n\sqrt[3]{q})=(m-n)^۳p \qquad (۲)$$

که اگر، با توجه به (۱)، مقدار $m\sqrt[3]{r}-n\sqrt[3]{q}$ راقراردهیم،به‌دست‌می‌آید:

$$۳mn(m-n)\sqrt[3]{prq}=m^۳r-n^۳q-(m-n)^۳p$$

که ممکن نیست، چرا که $\sqrt{pqr}$ عددی گنگ است.

به‌این نکته توجه کنیم که اول بودن عددهای متمایز p، q و r ضرورتی ندارد. این سه‌عدد، می‌توانند عددهای‌درست دلخواهی باشند، تنها بااین‌شرط که حاصل‌ضربشان مکعب کامل نباشد. قضیهٔ کلی زیر هم درست است.

a، b و c سه‌عدد درست متمایزند، به‌نحوی‌که دست‌کم دوتا از آن‌ها، اول باشند. ثابت‌کنید $\sqrt[n]{a}$، $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ نمی‌توانندجمله‌های متمایز یك‌تصاعد حسابی باشند.

تمرین. ثابت کنید، ریشه‌های سوم سه‌عدد اول متمایز، نمی‌توانند سه‌جمله از یك‌تصاعد هندسی یا تصاعد توافقی باشند (لزومی ندارد سه‌جملهٔ متوالی باشند).

۰۷ (۲/۱۹۸۴). واسطهٔ هندسی n عدد غیر منفی، برابر است با ریشهٔ nام حاصل‌ضرب آن‌ها.

I) آیا برای هر عدد درست و مثبت n، مجموعهٔ متناهی S_n شامل n عدد درست و مثبت متمایز وجود دارد، به نحوی که واسطهٔ هندسی جمله‌های هر زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ S_n، عددی درست باشد؟

II) آیا مجموعهٔ نامتناهی S، از عددهای متمایز، درست و مثبت‌وجود دارد، به‌نحوی که واسطهٔ هندسی جمله‌های هرزیرمجموعهٔ متناهی آن،عددی درست باشد؟

حل. I) S_n برای‌هرمقداردرست ومثبت n وجود دارد. کافی‌است‌هریك از عضوهای S_n را به‌صورت $a_i^{n!}$ بگیریم که، در آن، a_i عددی است درست و مثبت.

II) بابرهان خلف ثابت می‌کنیم، چنین‌مجموعه‌ای‌وجود ندارد. فرض کنید، چنین مجموعه‌ای‌مثل S وجود داشته‌باشد. a و b را دوعضو ازمجموعهٔ S می‌گیریم. تعداد عامل‌های اول، در هریك از دوعدد a و b محدود است. بنابراین عدد $\frac{b}{a}$، تنها برای چند مقدار (به‌تعداد متناهی) از n، می‌تواند کسر

گویایی از توان nام باشد؛ یعنی عددی مانند p وجود دارد، به نحوی که $\sqrt[p]{\frac{b}{a}}$، عددی گنگ است. اکنون، عددهای درست دیگری مانند c_2، c_3، …، c_p را از مجموعهٔ نامتناهی S در نظر می‌گیریم. بنا به فرض باید واسطهٔ هندسی

$$(a، c_2، c_3، \ldots، c_p) \text{ و } (b، c_2، c_3، \ldots، c_p)$$

دو عدد درست باشند. و این، یک تناقض است، زیرا نسبت این دو واسطه، عدد گنگ $\sqrt[p]{\frac{b}{a}}$ است.

۸. (۳/۱۹۸۶). کوچکترین عدد درست ومثبت n را پیداکنید $(n>1)$ که، برای آن، ریشهٔ دوم واسطهٔ حسابی مجذورهای نخستین n عدد درست، عددی درست باشد.

یادداشت. ریشهٔ دوم واسطهٔ حسابی مجذورهای n عدد a_1، a_2، …، a_n چنین است:

$$\left[\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

حل. می‌دانیم:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

به‌این ترتیب، مساله به‌این‌جا منجر می‌شود که معادلهٔ دیوفانتی

$$(n+1)(2n+1)=6m^2$$

را برای $n>1$ حل کنیم. باید $(n+1)(2n+1)$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد، و این وقتی ممکن است که در تقسیم n بر ۶ به‌باقی‌ماندهٔ ۱ یا ۵ برسیم.

حالت اول. $n=6k+5$.

در این‌حالت به‌دست می‌آید: $(k+1)(12k+11)=m^2$. عددهای

$k+1$ و $2k+11$ نسبت به‌هم اول‌اند، بنا بر این باید هر یك از آن‌ها، مجذور کامل باشد: $k+1=a^2$، $2k+11=b^2$، از آن‌جا

$$12a^2=b^2+1$$

شبیه مساله‌های ۲ و ۳ در همین بخش، می‌توان به کمك هم‌نهشتی به‌مدول ۴، ثابت کرد که این معادله جواب ندارد. در این‌جا $12a^2\equiv 0 \pmod 4$، در حالی که

$$b^2+1\equiv 1 \pmod 4 \text{ یا } b^2+1\equiv 2 \pmod 4$$

حالت دوم $n=6k+1$.

در این حالت $m^2=(3k+1)(4k+1)$. $3k+1$ و $4k+1$ نسبت به‌هم اول‌ندو، بنا بر این، باید داشته باشیم: $3k+1=a^2$ و $4k+1=b^2$؛ یعنی

$$(2a-1)(2a+1)=3b^2$$

به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید $b=1$ که از آن‌جا به‌دست می‌آید $n=1$ که با شرط $n>1$ مغایر است. اگر به‌همین ترتیب، برای مقدارهای متوالی عدد a آزمایش کنیم، کوچکترین مقدار مناسب برای a، عدد $a=13$ است که، به‌ازای آن، $n=337$ به‌دست می‌آید.

۹. (۱۹۷۵/۱). الف) ثابت کنید اگر $x, y\geqslant 0$، آن‌گاه

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$$

(در این‌جا، $[u]$ به‌معنای بخش درست عدد u است، یعنی بزرگترین عدد درستی که از u تجاوز نکند.)

ب) با استفاده از الف)، یا به‌طریقی دیگر، ثابت کنید:

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای درست و مثبت m و n، عددی درست است.

حل. الف) فرض می‌کنیم $x=x_1+u$ و $y=y_1+v$ که، در آن‌ها، x_1 و y_1 عددهای درست غیر منفی‌اند و $0\leqslant u<1$ و $0\leqslant v<1$. در این

صورت، نابرابری موردنظر، چنین می‌شود:

$$x_1+y_1+[5u]+[5v]\geqslant[3u+v]+[3v+u] \qquad (1)$$

ثابت می‌کنیم:

$$[3u+v]+[3v+u]\leqslant[5u]+[5v] \qquad (2)$$

با توجه به نقش‌های متقارن u و v، می‌توان فرض کرد $u\geqslant v$. دراین صورت خواهیم داشت: $[5u]\geqslant[3u+v]$. اگر $u\leqslant 2v$، درضمن به دست می‌آید: $[5v]\geqslant[3v+u]$ و، بنابراین، نابرابری (۲)، دراین حالت ثابت می‌شود.

اکنون $u>2v$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم $5u=a+b$ و $5v=c+d$، که‌درآن‌ها، a و c عددهای درست‌غیرمنفی‌اند و $0\leqslant b<1$ و $0\leqslant d<1$.
با این فرض‌ها، نابرابری (۲)، به این‌صورت درمی‌آید:

$$a+c\geqslant\left[\frac{3a+c+3b+d}{5}\right]+\left[\frac{3c+a+3d+b}{5}\right] \qquad (3)$$

داریم $2v<u<1$، بنابراین $10v<5u<5$، یعنی

$$2c+2d<a+b<5$$

ازنابرابری سمت‌راست نتیجه می‌شود $a<5$ یا $a\leqslant 4$؛ و ازنابرابری‌سمت چپ $a\geqslant 2c$، زیرا با فرض $a<2c$ به‌دست می‌آید:

$$a\leqslant 2c-1,\ a+1-2c\leqslant 0,\ a+b-2c<0$$

به این ترتیب: $2c\leqslant a\leqslant 4$. حالت‌های ممکن را آزمایش می‌کنیم:

a	۴	۴	۴	۳	۳	۲	۲	۱	۰
c	۲	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰

و به‌سادگی می‌توان، درستی نابرابری (۲) را، دراین ۹ حالت، موردتحقیق قرارداد، زیرا $3b+d<4$ و $3d+b<4$.

ب) اگر $m!$ برعدداول p بخش‌پذیر باشد، بزرگترین توان p، چنین است.

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^{۲}}\right]+\left[\frac{m}{p^{۳}}\right]+\cdots$$

کافی‌است ثابت کنیم، برای هرعدد درست دلخواه $r \geqslant ۲$، داریم:

$$\left[\frac{۵m}{r}\right]+\left[\frac{۵n}{r}\right]\geqslant\left[\frac{m}{r}\right]+\left[\frac{n}{r}\right]+\left[\frac{۳m+n}{r}\right]+$$
$$+\left[\frac{۳n+m}{r}\right] \qquad (۴)$$

فرض می‌کنیم: $m=rm_{۱}+x$ و $n=rn_{۱}+y$ کــه، در آن $۰\leqslant x<r$ و $۰\leqslant y<r$ (r، $m_{۱}$ و $n_{۱}$ عددهایی درست‌اند). با این فرض‌ها، می‌توان(۴) را به‌این صورت نوشت:

$$\left[\frac{۵x}{r}\right]+\left[\frac{۵y}{r}\right]\geqslant\left[\frac{۳x+y}{r}\right]+\left[\frac{۳y+x}{r}\right]$$

که درستی آن از الف) نتیجه می‌شود.

تمرین. ثابت کنید، هریك از این عبارت‌ها، عددی درست است:

I. $$\frac{(۳m)!(۳n)!}{m!n!(m+n)!(m+n)!}$$

II. $$\frac{(۴m)!(۴n)!}{m!n!(۲m+n)!(۲n+m)!}$$

III. $$\frac{(mnr)!}{m!n!^{m}r!^{mn}}$$

IV. $$\frac{(m-۱)!\delta}{m_{۱}!m_{۲}!\ldots m_{r}!}$$

در کسر اخیر $m=m_{۱}+m_{۲}+\ldots+m_{r}$ و δ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای $m_{۱}$، $m_{۲}$، ...، m_{r} است.

۱۵۰. (۱۹۸۲/۴). ثابت کنید، عدد درست و مثبت k وجود دارد، به نحوی که $k.۲^n+۱$، به ازای هر مقدار درست و مثبت n، عدد مرکب (غیر اول) باشد.

حل. ابتدا این مساله را حل می‌کنیم: عدد درست و مثبت k را پیدا کنید، به نحوی که، عدد $k.۲^n+۱$، به ازای همهٔ مقدارهای درست و مثبت n، که جمله‌های یک رشتهٔ نامتناهی حسابی را می‌سازند، عددی مرکب است.

$b>۱$ را عددی درست می‌گیریم و فرض می‌کنیم، p مقسوم‌علیه اولی از عدد $۲^b-۱$ باشد؛

$$۲^b\equiv ۱(\mathrm{mod}\ p) \qquad (۱)$$

a را عددی درست با شرط $۰\leqslant a<b$ و k را عددی درست با شرط $k>p$ می‌گیریم، به نحوی که

$$k\equiv -۲^{b-a}(\mathrm{mod}\ p)$$

اگر n عددی درست با شرط

$$n\equiv a(\mathrm{mod}\ b) \qquad (۲)$$

باشد، یعنی برای مقدارهایی از $m\geqslant ۰$ داشته باشیم $n=a+bm$، آن‌وقت بنابر (۱):

$$k\cdot ۲^n\equiv -۲^{b-a}۲^{a+bm}\equiv -۱(\mathrm{mod}\ p)$$

بنابراین، عدد $k.۲^n+۱$ بر p بخش‌پذیر است و چون از p بزرگتر است، به‌ازای همهٔ مقدارهایی که با (۲) سازگار باشند، عددی است مرکب.

نتیجهٔ موردنظر مساله وقتی به‌دست می‌آید که بتوانیم مجموعه‌ای متناهی از سه‌تائی‌های (p_j, a_j, b_j) با ویژگی‌های زیر بسازیم: p_jها، عددهایی اول و متمایزند؛ b_jها عددهایی درست و مثبت‌اند، به نحوی که برای هر j داشته باشیم:

$$۲^{b_j}\equiv ۱(\mathrm{mod}\ p_j) \qquad (۱)_j$$

a_jها عددهایی درست‌اند و $۰\leqslant a_j<b_j$، به نحوی که برای هر عدد درست n، درست کم یکی از هم نهشتی‌های زیر برقرار باشد:

$$n \equiv a_j \pmod{b_j} \qquad (۲)_j$$

فرض کنیم، این ساختمان را انجام‌داده باشیم، با استفاده از قضیهٔ‌چینی مربوط به باقی‌مانده‌ها، عــدد درست و مثبت k را، بزرگتر از هر p_j، پیدا می‌کنیم، به‌نحوی‌که برای هر j داشته باشیم:

$$k \equiv -۲^{b_j - a_j} \pmod{p_j}$$

دراین‌صورت، عدد $۱ + k.۲^n$، به‌ازای هرمقدار n عددی مرکب خواهدبود.

تنها این مرحله باقی‌مانده است‌که، ساختمان بالارا، به‌انجام برسانیم. این‌کار را، با روش‌های مختلفی می‌توان انجام داد و ما در این‌جا، دو روش مختلف را می‌آوریم.

روش اول. برای تحقیق این‌که، عــدد درست n، دست‌کم در یکی از هم‌نهشتی‌های (۲) صدق می‌کند، کافی است همهٔ باقی‌مانده‌ها را در هم‌نهشتی به مدول b آزمایش‌کنیم، به‌شرطی‌که b، کوچکترین مضرب مشترك b_jها باشد. بنابراین، بهتر است‌که عدد درست b را بــا چند مقسوم‌علیه درنظر بگیریم. انتخاب‌مناسب $b = ۲۴$ است‌که مقسوم‌علیه‌های بزرگتر ازواحدآن،چنین‌اند: ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲، ۲۴. باتوجه‌به‌شرط $(۱)_j$، باید $۲^{b_j} - ۱$ بر p_j بخش‌پذیر باشد. b_j را ازمیان مقسوم‌علیه‌های b انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$۲^۲ - ۱ = ۳، \ ۲^۳ - ۱ = ۷، \ ۲^۴ - ۱ = ۵ \times ۳، \ ۲^۶ - ۱ = ۳^۲ \times ۷،$$

$$۲^۸ - ۱ = ۳ \times ۵ \times ۱۷، \ ۲^{۱۲} - ۱ = ۳^۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۳،$$

$$۲^{۲۴} - ۱ = ۳^۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۳ \times ۱۷ \times ۲۴۱$$

چون عددهای اول p_j باید متفاوت باشند، عدد۶ نمی‌تواند به‌عنوان یکی از b_jها انتخاب‌شود (اگر دوعدد ۲ و ۳، دربین‌آن‌ها باشند). پس، سه‌تایی‌های انتخابی، به‌این‌صورت‌اند:

b_j	۲	۳	۴	۸	۱۲	۲۴
a_j	۰	۰	۱	۳	۷	۲۳
p_j	۳	۷	۵	۱۷	۱۳	۲۴۱

a_jها پس از آزمایش ساده انتخاب شده‌اند و به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، هر عدد درست بین ۱ و ۲۴، دست‌کم در یکی از هم‌نهشتی‌های $(۲)_j$ صدق می‌کند.

روش دوم. $b = ۲^h$ را، به‌عنوان کوچکترین مضرب مشترک b_jها می‌گیریم و انتخاب می‌کنیم:

$$b_j = ۲^j,\quad a_j = ۲^{j-۱} - ۱ \quad (۱ \leqslant j \leqslant k)$$
$$b_{h+۱} = ۲^h,\quad a_{h+۱} = ۲^h - ۱$$

ادعا می‌کنیم، هرعدد درست‌بین ۱ و ۲، درست دریکی ازهم‌نهشتی‌های $(۲)_j$ صدق می‌کند. روشن است که هرعدد درست n، حداکثر با یکی‌از این هم‌نهشتی‌ها سازگار است. درست ۲^{h-j} تا از این عددهای درست، به ازای $i \leqslant j \leqslant h$، در هم‌نهشتی $(۲)_j$ صدق می‌کنند، درحالی‌که تنها یکی از آن‌ها با $(۲)_{h+۱}$ سازگار است. ازآن‌جاکه

$$۲^{h-۱} + ۲^{h-۲} + \dots + ۱ + ۱ = ۲^h$$

هیچ عدد درستی بین ۱ و ۲^h را کنار نگذاشتیم.

اگر دوتا از b_jها برابر گرفته شوند، اشکالی پیش نمی‌آید، زیرا این p_jها هستندکه باید متمایز باشند. بنابر شرط $(۱)_j$، p_jهـا، مقسوم‌علیه‌های $۲^{b_j} - ۱ = ۲^{۲^j} - ۱$ هستند. ادعا می‌کنیم کـه می‌توانیم آن‌ها را متمایز از یکدیگر انتخاب کنیم.

از روش استقرا استفاده می‌کنیم. چون $۳ = ۲^{۲^۱} - ۱$، باید $p_۱ = ۳$ انتخاب شود. فرض‌کنید، $p_۱$، $p_۲$، ...، p_m انتخاب شده باشند. می‌نویسیم:

$$۲^{۲^{m+۱}} - ۱ = (۲^{۲^m} - ۱)(۲^{۲^m} + ۱)$$

$p_{m+۱}$ را به‌عنوان یکی‌ازمقسوم‌علیه‌های اول $۲^{۲^m} + ۱$ انتخاب می‌کنیم. چون به‌ازای $i \leqslant j \leqslant m$، $۲^{۲^j} - ۱$ مقسوم علیهی از $۲^{۲^m} - ۱$ است، بنابراین با عدد $۲^{۲^m} + ۱$، نسبت به‌هم اول‌اند. واین روشن می‌کندکه‌هیچ‌کدام ازp_jها، برای $۱ \leqslant j \leqslant m$، برابربا p_m نیستند.

توجه کنیم که p_{m+1}، منحصر به‌فرد است، به‌شرطی‌که $۲^{۲^m}+۱$ عددی اول یا توانی از یك عدد اول باشد. مرسن (Mersenne) روشن کرد که $۲^{۲^m}+۱$ به‌ازای ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ $=m$، عددی اول است؛ و اولر نشان داد که $۲^{۲^۵}+۱$ برابر با حاصل‌ضرب دو عدد اول ۶۴۱ و ۶۷۰۰۴۱۷ می‌باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود که می‌توانیم ۶ $=h$ بگیریم و سه‌تایی‌ها را به این‌صورت انتخاب کنیم:

b_j	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۶۴
a_j	۰	۱	۳	۷	۱۵	۳۱	۶۳
p_j	۳	۵	۱۷	۲۵۷	۶۵۵۳۷	۶۴۱	۶۷۰۰۴۱۷

بقیهٔ مجموعه‌های ممکن از سه‌تایی‌ها، با روش اول، در دو تمرین زیر داده شده‌اند.

تمرین ۱. ۳۶ $=b$ بگیرید و

b_j	۲	۳	۴	۹	۱۲	۱۸	۳۶
a_j	۰	۰	۱	۲	۷	۵	۳۵
p_j	۳	۷	۵	۷۳	۱۳	۱۹	۳۷

$_j$(۱) را مورد تحقیق قرار دهید و نشان دهید، برای هر عدد درست n ($۱\leqslant n\leqslant ۳۶$)، دست‌کم یکی از هم‌نهشتی‌های $_j$(۲) برقرار است.

تمرین ۲. ۶۰ $=b$ بگیرید و

b_j	۲	۳	۴	۵	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰	۳۰
a_j	۰	۰	۱	۰	۳	۱۱	۷	۱۹	۱
p_j	۳	۷	۵	۳۱	۱۱	۱۳	۱۵۱	۴۱	۲۳۱

$_j$(۱) را تحقیق کنید و نشان دهید برای هر n($۱ \leqslant n \leqslant ۶$)، دست‌کم یکی از هم‌نهشتی‌های $_j$(۲) برقرار است.

یادداشت. هر دو روش اول و دوم به سرپینسکی، ریاضی‌دان لهستانی، تعلق دارد. او این نتیجه‌ها را هم به‌دست آورده است:

I. درروش اول می‌توان نشان‌داد که بی‌نهایت عدد درست فرد kوجود دارد که، به‌ازای‌هریك‌ازآن‌ها، عددهای $k+۲^n$($n = ۱، ۲، ...$) مرکب‌اند.

II. اردیوش (Erdös) ثابت کرد بی‌نهایت عدد فرد طبیعی k وجود دارد، به‌نحوی که عدد $k+۲^n$ ($n = ۱، ۲، ...$) بر یکی از عددهای ۳، ۵، ۱۳، ۱۷، ۲۴۱ بخش‌پذیر باشد.

شین‌زل (Shinzel) ثابت کرد: اگر $k+۲^n$، برای‌عددفرد و درست k و $n = ۱، ۲، ...$ بر عدداول p بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت، عدد $k.۲^n+۱$ هم بر عدد اول p بخش‌پذیر است.

اثبات شین‌زل به‌این‌صورت است:

بنا به‌فرض، $k+۲^{n(\phi(P)-۱)}$ برمقسوم‌علیه اول p ازعدد P بخش‌پذیر است. بنا به قضیهٔ فرما ــ اولر (ضمیمه را ببینید)

$$۲^{n\phi(P)} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ P)$$

بنابراین

$$۲^{n\phi(P)} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ p) \qquad (۱)$$

داریم:

$$۲^{n\phi(P)-n} \equiv -k (\mathrm{mod}\ p)$$

اگر دوطرف را در 2^n ضرب و از (۱) استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$k \cdot 2^n \equiv -1 \pmod p$$

یعنی p، مقسوم علیهی از $k \cdot 2^n + 1$ است. کوچکترین مقدار k که، به‌ازای آن، $k \cdot 2^n + 1$ برای همهٔ مقدارهای n، عددی مرکب باشد، معلوم نیست.

۰۱۱ (۵/۱۹۸۳). فاصله‌ای باز به‌طول $\frac{1}{n}$ را روی محور عددهای حقیقی در نظر می‌گیریم (n، عددی است درست و مثبت). ثابت کنید، تعداد کسرهای تحویل ناپذیر $\frac{p}{q}$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$ در این فاصله، حداکثر برابر است با $\frac{n+1}{2}$.

حل. همهٔ نقطه‌های گویا، در بازهٔ $\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{n}\right)$ را به‌دو زیرمجموعه تقسیم می‌کنیم: $\left\{\frac{u_i}{v_i}\right\}$، $i = 1, 2, \dots, r$ که در آن، مخرج v_i در فاصلهٔ ۱ و $\frac{n}{2}$ واقع است؛ و $\left\{\frac{x_i}{y_i}\right\}$، $i = 1, 2, \dots, s$، که در آن، مخرج y_i در بازهٔ $\frac{n}{2} < y_i \leqslant n$ قرار دارد و همهٔ این کسرها، تحویل ناپذیرند. برای هر v_i، عدد درستی مانند c_i وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\frac{n}{2} \leqslant c_i v_i \leqslant n$. تعریف می‌کنیم: $y_{s+i} = c_i v_i$ و $x_{s+i} = c_i u_i$. هیچ دوعضوی از مجموعهٔ $\{y_i : 1 \leqslant i \leqslant r+s\}$ وجود ندارد که با هم برابر باشند، زیرا از برابری $y_j = y_k$ نتیجه می‌شود

$$\left|\frac{x_j}{y_j} - \frac{x_k}{y_k}\right| \geqslant \frac{1}{y_j} \geqslant \frac{1}{n}.$$

و این، با این فرض که طول بازه برابر $\frac{1}{n}$ است، تناقض دارد. بنابراین، تعداد نقطه‌های متمایز گویا، برابر است با

$$r+s\leqslant n-\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant\frac{n+1}{2}$$

توجه کنیم کـه، این تعداد ماکزیمم عضوهـا را، می‌تـوان در بـازهٔ $\left(\varepsilon+\frac{2}{n}, \varepsilon+\frac{1}{n}\right)$، با شرط $0<\varepsilon<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ به‌دست آورد. عـددهای گویا، در این بازه، چنین‌اند:

$$\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots, \frac{1}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \frac{2}{n}$$

دو عدد گویای آخری، به شرط فرد بودن n متمایز و به‌شرط زوج بودن n، برابرند.

اثبات دیگری هم می‌توان، براساس قضیهٔ زیر، برای مساله آورد:

قضیه. اگر $\{a_i: 1\leqslant i\leqslant n+1\}$، زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ $2n$عضوی $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ باشد، آن‌وقت، عددهای a_j و a_k وجود دارند، به‌نحوی که a_k بر a_j بخش‌پذیر باشد.

[برای اثبات قضیه، مجموعهٔ $\{b_i: 1\leqslant i<n+1\}$ را درنظر می‌گیریم که، در آن، b_i، بزرگترین عدد فردی است کـه a_i را می‌شمارد و سپس، از اصل دیریکله استفاده می‌کنیم.]

درمسالهٔ بالا، فرض کنید، برعکس، دست‌کم $k+1$ کسر وجود داشته باشد که، در آن، $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$. اگـر $\{q_i: 1\leqslant i\leqslant k+1\}$، مجموعـهٔ مخرج‌ها باشد، روشن است که زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ خواهد بود. بنابرقضیهٔ بالا، به‌ازای بعضی از مقدارهای j و k، عدد q_jعدد q_k را می‌شمارد: $q_k=\alpha q_j$ بنابراین

$$\left|\frac{p_j}{q_j}-\frac{p_k}{q_k}\right|=\frac{|\alpha p_j-p_k|}{q_k}\geqslant\frac{1}{n}$$

که با فرض مساله، مبنی بر این که فاصلهٔ باز مفروض، طولی برابر $\frac{1}{n}$ دارد، متناقض است.

۱۲۰. (۱/۱۹۸۶). a) آیا ۱۴ عدد مثبت و درست متوالی وجود دارد، به‌نحوی‌که هرکدام ازآن‌ها، بریك یا چند عدد اول p، با شرط $2 \leqslant p \leqslant 11$، بخش‌پذیر باشد؟

b) آیا ۲۱ عدد مثبت ودرست متوالی وجود دارد، به‌نحوی که هرکدام از آن‌ها، بر یك یاچند عدد اول p، با شرط $2 \leqslant p \leqslant 13$ بخش‌پذیر باشد؟

حل. a) جواب منفی است. مجموعه‌ای ۱۴عضوی از عددهای درست متوالی درنظر می‌گیریم. ۷عددزوج را، از بین آن‌ها، کنار می‌گذاریم، زیرا همهٔ آن‌ها بر ۲ بخش‌پذیرند. ثابت می‌کنیم، از بین ۷ عـدد دیگر، حداکثر سه‌عدد می‌توان پیدا کردکه بر ۳، ۵، ۷ یا ۱۱ بخش‌پذیرند. از این ۷ عدد درست فرد، حداکثر سه‌عدد بر ۳، حداکثر دوعدد بر ۵، حداکثر یك‌عدد بر ۷ و حداکثر یك عد بر ۱۱ بخش‌پذیر است. بنابراین، تنها وقتی، هر یك از ۷ عدد فرد، می‌توانند دست‌کم بریکی از عددهای ۳، ۵، ۷ یا ۱۱ بخش‌پذیر باشند،که هرکدام ازاین عامل‌های‌اول بتوانند مقسوم‌علیهی از حداکثر تعداد جمله‌ها باشند و شکافی وجود نداشته باشد (یعنی جمله‌ای‌که دست‌کم بر یکی از این عامل‌های اول بخش‌پذیر نباشد، پیدا نشود). برای این‌که نشان دهیم، چنین وضعی غیرممکن است، ابتدا توجه می‌کنیم، برای این‌که سه عدد ازاین ۷ عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشند، بایدجملهٔ اول، جملهٔ وسط و جملهٔ آخرمضربی از ۳ باشند. ولی‌چون تفاضل بین‌هر دو عدد ازجمله‌های باقی‌مانده‌کمتر از ۱۰ است، تنها یکی می‌تواند مضربی از ۵ باشد.

b) جواب‌مثبت‌است. اگرnرا بخش‌پذیر برعدد $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ بگیریم، آن وقت هریك از ۲۱ عدد متوالی $n-10$، $n-9$، ...، $n+10$، به‌جز $n-1$ و $n+1$، بر عدد اولی کوچکتر یا برابر ۷ بخش‌پذیر خواهد بود. اکنون، مقدار n را طوری پیدا می‌کنیم که $n-1$ و $n+1$ بر ۱۱ یا ۱۳ بخش‌پذیر باشند. بنابر قضیهٔ‌چینی باقی‌مانده‌ها، عددهای درست و مثبتn

پیدا می‌شوند، به‌نحوی که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$n\equiv -1 \pmod{13},\ n\equiv 1 \pmod{11},\ n\equiv 0 \pmod{210}.$$

و با این n، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم. کوچکترین عددی که، برای این منظور، به‌دست می‌آید، برابر است با ۹۴۵۰ و ۲۱ عدد متوالی موردنظر چنین‌اند:

$$9440,\ 9441,\ \ldots,\ 9459;\ 9460$$

۱۳. (۵/۱۹۸۶). اگر عدد درست $n \geqslant 1$ را به‌صورت مجموعی از یک یا چند عدد درست و مثبت بنویسیم و جمله‌های جمع را به صورت صعودی در نظر بگیریم، آن‌وقت، این مجموع را، یک **افراز** عدد n گوییم و آن‌را با π نشان می‌دهیم. مثلاً، برای $n=4$ افرازهای π چنین‌اند:

$$1+1+1+1,\ 1+1+2,\ 1+3,\ 2+2,\ 4$$

برای هر افراز π، تعداد واحدهایی راکه در π ظاهر شده‌اند، با $A(\pi)$ و تعداد عددهای متمایزی را که در π به‌کار رفته‌اند، با $B(\pi)$ نشان می‌دهیم. مثلا اگر $n=13$ و π یک‌افراز به‌صورت $1+1+2+2+2+5$ باشد، آن‌وقت، برای این افراز، $A(\pi)=2$ و $B(\pi)=3$.

ثابت‌کنید، برای هر عدد ثابت n، اگر همهٔ افرازهای π آن‌را درنظر بگیریم، مجموع $A(\pi)$ها با مجموع $B(\pi)$ها برابر است.

حل. $P(n)$ را تعداد افرازهای عدد n می‌گیریم و فرض می‌کنیم $P(0)=1$. تعداد افرازهای عددn، وقتی‌که عدد m دست‌کم یک‌بار در آن‌ها آمده باشد، برابر است با $P(n-m)$. با توجه به این نکته، ابتدا با روش استقرایی ثابت می‌کنیم:

$$\Sigma A(\pi)=P(n-1)+P(n-2)+\ldots+P(1)+P(0) \qquad (1)$$

رابطهٔ (۱) به‌روشنی برای $n=1$ درست‌است. اکنون فرض می‌کنیم، رابطهٔ (۱)، برای‌همهٔ‌مقدارهای $k<n$ $(n>1)$ درست‌باشد. تعدادافرازهای عدد n که، درآن‌ها، عدد ۱ یک‌بار یا بیشتر ظاهر می‌شود، برابر است با $P(n-1)$ و به صورت $\{$افرازهای $n-1\}+1$ هستند. از $P(n)$ افراز،

$P(n-1)$ افراز وجود دارد که با ۱ شروع می‌شوند و، بنا به فرض استقرا، افرازهای $(n-1)$ شامل

$$P(n-2)+P(n-3)+\dots+P(0)$$

عدد ۱ هستند. به‌این ترتیب، رابطهٔ (۱) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم که درضمن

$$\Sigma B(\pi)=P(n-1)+P(n-2)+\dots+P(1)+P(0) \qquad (2)$$

آرایشی از n مستطیل در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که سطرها با افرازهای π از n و ستون‌ها با عددهای ۱، ۲، m مشخص شده باشند. مهره‌ای را درسطر π و ستون m، به‌شرطی قرارمی‌دهیم که‌عدد m درآن افراز شده باشد. دراین صورت، $\sum B(\pi)$ برابر بـا تعداد مهره‌هایی است کـه در این آرایش قرار گرفته‌اند. ازطرف دیگر، تعدادکل مهره‌ها درستون mام آرایش برابراست با تعداد افزارهایی‌که با m ظاهر می‌شود، یعنی $P(n-m)$. به‌این ترتیب، تعداد مهره‌ها در هر ستون، با رابطهٔ (۲) داده می‌شود.

مساله را با روش دیگری هم می‌توان حل‌کرد. این تابع‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$P_k(x)=1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots$$

$$Q(x)=x+2x^2+3x^3+\dots$$

$$R(x)=Q(x)\prod_{k=2}^{\infty}P_k(x)$$

اگر به‌شکل تنظیم‌ضریب‌های $R(x)$ توجه کنیم، می‌بینیم که ضریب x^n درآن، برابر است با $\Sigma A(\pi)$. همچنین

$$Q(x)=1+2x^2+3x^3+\dots=$$

$$=(x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+\dots)=$$

$$=(x+x^2+x^3+\dots)P_1(x)$$

بنابراین

$$R(x)=(x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)\prod_{k=۱}^{\infty}P_k(x)$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\prod_{k=۱}^{\infty}P_k(x)=c_{\circ}+c_{۱}x+c_{۲}x^{۲}+\cdots$$

ببینیم c_iها چگونه‌اند! C_{n-k}، برابر است با تعداد افرازهای n که‌شامل‌عدد درست k باشند ($۱ \leqslant k \leqslant n$). بنابراین، تعدادافرازهای n، که k درآن‌هاظاهر شده باشد، برای $k=۱، ۲، \ldots، n$، درمجموع، برابر است با

$$c_{n-۱}+c_{n-۲}+\cdots+c_{\circ}$$

که‌این، درضمن، برابر است با ضریب x^n در

$$R(x)=(x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)\prod_{k=۱}^{\infty}P_k(x)$$

می‌بینیم که تعدادافرازهای πازعدد n، که شامل k باشند ($k=۱، ۲، \ldots، n$) برابر است با مجموع همهٔ $B(\pi)$ها، یعنی همهٔ افزارهای π ازعدد n.

هندسهٔ مسطحه

---

۰۱ (۱/۱۹۸۱). زاویه‌ای برابر $\frac{۱۸\circ}{n}$ درجه است‌که، درآن، n عددی است درست و غیرقابل بخش بر ۳. ثابت‌کنید، این زاویه را می‌توان به‌کمک پرگار و خطکش، به سه بخش برابر تقسیم کرد.

حل. چون $n \neq ۳k$، پس n و ۳ نسبت بـه هم اول‌اند: $(n، ۳)=۱$.

به‌این ترتیب، عددهای درست r و s وجود دارند، به‌نحوی که داشته باشیم: $3r+ns=1$. این رابطه را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{180^\circ r}{n}+60^\circ s=\frac{60^\circ}{n}$$

زاویهٔ $\frac{180^\circ}{n}$ مفروض است؛ زاویهٔ ۶۰ درجه به‌کمك پرگار و خط‌کش، قابل رسم است: بنابراین می‌توانیم زاویه‌های $\frac{180^\circ r}{n}$ و $60^\circ s$ را رسم کنیم؛ و این، به‌معنای آن است که زاویه $\frac{60}{n}$ درجه هم قابل رسم است.

تعمیم. در حالت کلی، اگر m و n نسبت به‌هم اول باشند، می‌توانیم زاویهٔ مفروض $\frac{180}{n}$ درجه را، به‌کمك پرگار و خط‌کش، به m بخش برابر تقسیم کنیم. روش استدلال، شبیه حل مسالهٔ قبل است چون $(n, m)=1$، بنابراین عددهای درست r و s وجود دارند، به‌نحوی که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$mr+ns=1$$

دو طرف این رابطه را در $\frac{180^\circ}{mn}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{180^\circ r}{n}+\frac{180^\circ s}{m}=\frac{180^\circ}{mn}$$

در ضمن توجه کنیم که، زاویهٔ $\frac{180}{m}$ درجه، وقتی قابل رسم است که بتوانیم m ضلعی منتظم را رسم کنیم. گوس ثابت کرد که p ضلعی منتظم را (p، عددی است اول) تنها وقتی می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم کرد که، عدد p، به‌صورت $p=2^{2^n}+1$ باشد. بـه ازای $n=0, 1, 2, 3, 4$، برای p این عددها به‌دست می‌آید:

۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷

خود گوس، ۱۷ضلعی منتظم را به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم کرد. در شهر گوتینگن آلمان غربی، نسخه‌ای خطی وجود دارد که در آن، یك ۲۵۷ ضلعی منتظم، به‌طور کامل، رسم شده است.

۰۴ (۲/۱۹۷۸). $ABCD$ و $A'B'C'D'$ نگاشت‌های مربع از یك ناحیه‌اندکه بامقیاس‌های مختلف رسم شده‌وشبیه شکل۶، روی‌هم قرارگرفته‌اند. ثابت کنید، تنها یك نقطهٔ O از مربع کوچك وجود دارد که روی نقطهٔ O'از مربع بزرگ واقع‌است و هردونقطهٔ O وO'، معرف یك نقطه از ناحیه هستند. با روش‌های اقلیدسی (یعنی به‌کمك پرگـار و خط‌کش)، راهی برای تعیین نقطهٔ O پیداکنید.

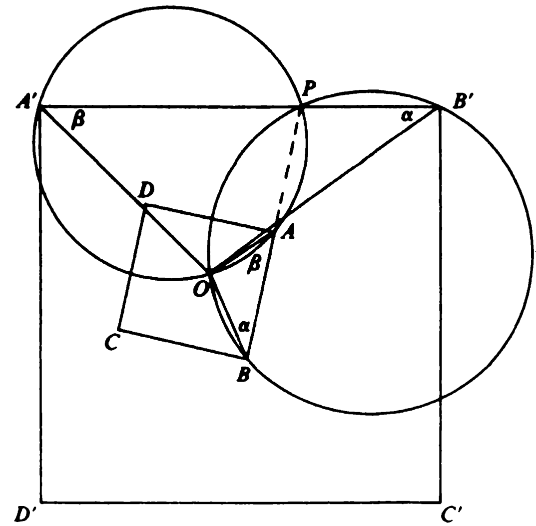
حل. مساله را، با استفاده از این قضیه حل می‌کنیم که: نگاشت منقبض مربع بسته، یك نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد دارد. [این قضیهٔ، حالت خاصی از قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئر (Brouwer) است، ولی‌می‌توان آن‌را به‌طور مستقیم هم، ثابت کرد.]

درمسالهٔ ما، می‌توان ازدنبالهٔ مربع‌های جهت‌دار متشابهی استفاده‌کرد که مرتباً کوچکتر می‌شوند و در درون مجموعهٔ مربع‌های قبلی قرار دارند. به‌این‌ترتیب، به‌مجموعه‌ای از ناحیه‌های تودرتو می‌رسیم که‌قطر آن‌ها به‌سمت صفر میل می‌کند. نقطهٔ حدی یا نقطهٔ اشتراك این مجموعهٔ ناحیه‌های تودرتو همان نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد است.

دراین‌جا، دوروش برای پیداکردن نقطهٔ ثابت‌می‌آوریم در روش اول از دایره‌ها، و در روش دوم، تنها از خط‌کش استفاده شده است.

نقطهٔ برخورد AB و $A'B'$ را P می‌نـامیم (شکل ۹). دو دایره رسم می‌کنیم‌که یکی ازنقطه‌های A' و P و A و دیگری ازنقطه‌های B' و P و B گذشته باشد. این دو دایره،، یکدیگر را در نقطهٔ مطلوب O $(O\neq P)$ قطع می‌کنند.

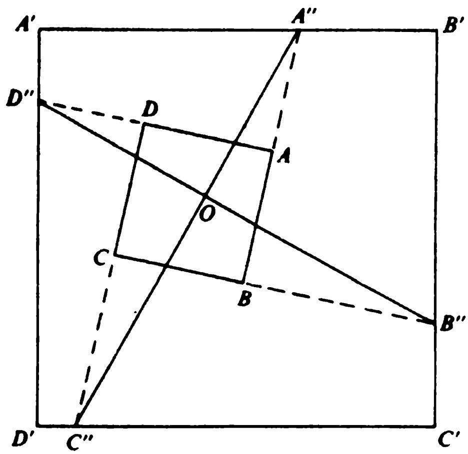
دو زاویه‌ای‌که درشکل۹، باα نشان داده‌ایم، باهم برابرند (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به‌کمان PO). همچنین، دو زاویه‌ای هم‌که باβنشان‌داده‌ایم،



شکل ۹

با هم برابرند (هریك از آن‌ها، مکمل زاویهٔ PAO است). از این‌جا،دومثلث OAB و $OA'B'$ با هم متشابه‌می‌شوند؛ بنابراین، دوران دور نقطهٔ Oبه‌اندازهٔ زاویهٔ AOA'، مربع$ABCD$را به‌صورتی درمی‌آورد که ضلع‌هایی موازی با ضلع‌های مربع $A'B'C'D'$ داشته باشد و با بزرگ کردن به نسبت $\frac{A'B'}{AB}$، بر مربع بزرگتر منطبق شود.

برای پیدا کردن نقطهٔ O، به‌کمك خط کش، نقطه‌های برخورد AB و $A'B'$، BC و $B'C'$، CD و $C'D'$، DA و $D'A'$ را به دست می‌آوریم و آن‌هارا، به‌ترتیب، A''، B''، C'' و D'' می‌نامیم. نقطهٔ ثابت O، محل برخورد $A''C''$ و $B''D''$ خواهد بود. در واقع، شکل شامل نقطهٔ O و دوخط راست AB و CD، با شکل شامل O، و دوخط راست $A'B'$ و $C'D'$ متشابه‌است. بنابراین انبساط از نقطهٔ O،که خط‌راست AB را بهCD برساند، خط‌راست $A'B'$ را به‌خط راست $C'D'$ و، همچنین، نقطهٔ A'' را به‌نقطهٔ C'' می‌رساند. درنتیجه، O، با A'' و C'' و، همچنین، با B'' و D''، هم‌راستاست.



شکل ۱۵

۰۳ (۲/۱۹۷۷). دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دریک صفحه داده شده‌اند، به نحوی که خطهای راست AA'، BB' و CC' باهم موازی‌اند. اگر $[ABC]$ را به معنای مساحت مثلث ABC (با علامت مناسب $\pm$) بگیریم، ثابت کنید:

$$۳([ABC]+[A'B'C'])=[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']+$$
$$+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB]$$

حل. یادآوری می‌کنیم که، علامت $[ABC]$، به این ترتیب مشخص می‌شود: جهت دوران را در صفحهٔ مثلث ABC، به عنوان جهت مثبت معین می‌کنیم. اگر حرکت روی محیط مثلث از A به B به C و به A در جهت مثبت باشد، $[ABC]$ رامثبت و اگرحرکت مزبور درجهت منفی باشد، $[ABC]$ را منفی می گیریم. اگر صفحهٔ کاغذ را، به عنوان یك طرف از یك کاغذ غیر شفاف درنظر بگیریم، می‌توان جهت را طوری انتخاب کرد که، مثلاً، جهت مثبت درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد (اگر باکاغذ شفاف سروکار داشته باشیم، بسته به این که کدام روی کاغذ را در نظر بگیریم، ممکن است جهت مثبت، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت و یا عکس آن باشد).

حل‌را با اتحاد زیر آغاز می‌کنیم. این‌اتحاد را می‌توان، به‌طور جبری ثابت‌کرد، ولی درستی آن، از روی شکل ۱۱، کاملاً روشن است.

اگر O نقطه‌ای از صفحه باشد (در داخل‌یا خارج مثلث ABC)، آن‌گاه

$$[ABC]=[OAB]+[OBC]+[OAC] \qquad (۱)$$

بنا بر این

$$[ABC]=[A'BC]+[A'CA]+[A'AB] \qquad (۲)$$

$$[A'B'C']=[AB'C']+[AC'A']+[AA'B'] \qquad (۲')$$

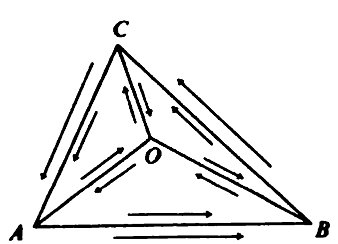
بنا به‌فرض $AA'||CC'$، بنا بر این قدرمطلق‌های $[A'CA]$ و $[AC'A']$ برابرند، ولی از آن‌جا که حرکت روی محیط آن‌ها، در دوجهت مختلف است، بنا بر این علامت‌های مختلفی دارند، یعنی مجموع آن‌ها برابر صفر است. به‌همین‌جهت مجموع $[A'AB]$ و $[AA'B']$ هم برابرصفر می‌شود و ازمجموع (۲)و (۲') به‌دست می‌آید:

$$[ABC]+[A'B'C']=[A'BC]+[AB'C']$$

به‌همین‌ترتیب، و با تبدیل دوری نسبت‌به A، B و C، دومعادلهٔ دیگر به‌دست می‌آید، که از مجموع آن‌ها، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

راه‌حل دوم. راه‌حل‌دوم، شامل محاسبه‌های‌نسبتاًطولانی است، باوجود این از این‌جهت مفید است که کاربرد دترمینان‌ها را نشان می‌دهد.

اگر (x_1, y_1)، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) را مختصات سه‌رأس مثلثی در



شکل ۱۱

دستگاه محورهای قائم بگیریم، مساحت مثلث، با این دترمینان بیان می‌شود:

$$F=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

از طرف دیگر، هر دترمینان، تابعی است خطی نسبت به‌ستون‌های خود، یعنی

$$\begin{vmatrix} x_۱+x'_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲+x'_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳+x'_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x'_۱ & y_۱ & ۱ \\ x'_۲ & y_۲ & ۱ \\ x'_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix} \qquad (۱)$$

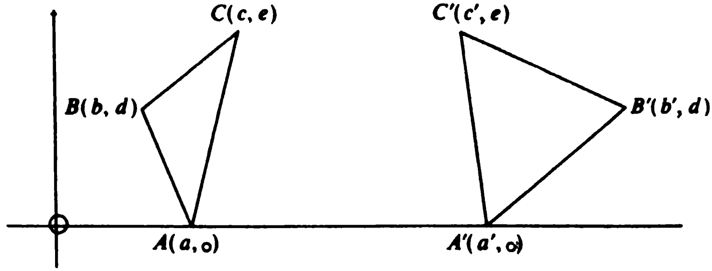
اکنون، مختصات راس‌های دومثلث‌مفروض‌را، مطابق شکل ۱۲ درنظر می‌گیریم. مساحت ۸ مثلثی‌راکه درصورت مساله مطرح شده است، به‌صورت دترمینان نشان می‌دهیم:

$$۳\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ b & d & ۱ \\ c & e & ۱ \end{vmatrix}+۳\begin{vmatrix} a' & ۰ & ۱ \\ b' & d & ۱ \\ c' & e & ۱ \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ b' & d & ۱ \\ c & e & ۱ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & ۰ & ۱ \\ b & d & ۱ \\ c & e & ۱ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & ۰ & ۱ \\ b & d & ۱ \\ c' & e & ۱ \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ b' & d & ۱ \\ c' & e & ۱ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & ۰ & ۱ \\ b' & d & ۱ \\ c & e & ۱ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ b & d & ۱ \\ c' & e & ۱ \end{vmatrix}$$

اگر از ویژگی (۱)، برای هر دو طرف برابری بـالا استفاده کنیم، به‌معادلهٔ زیر، که هم‌ارز آن است، می‌رسیم:



شکل ۱۲

$$۳\begin{vmatrix} a+a' & ۰ & ۱ \\ b+b' & d & ۱ \\ c+c' & e & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳(a+a') & ۰ & ۱ \\ ۳(b+b') & d & ۱ \\ ۳(c+c') & e & ۱ \end{vmatrix}$$

که درستی آن روشن است.

این نتیجه را می‌توان بـرای چهاروجهی و یـا، به‌طور کلی، بـرای سیمپلکس‌ها[۱]، تعمیم داد.

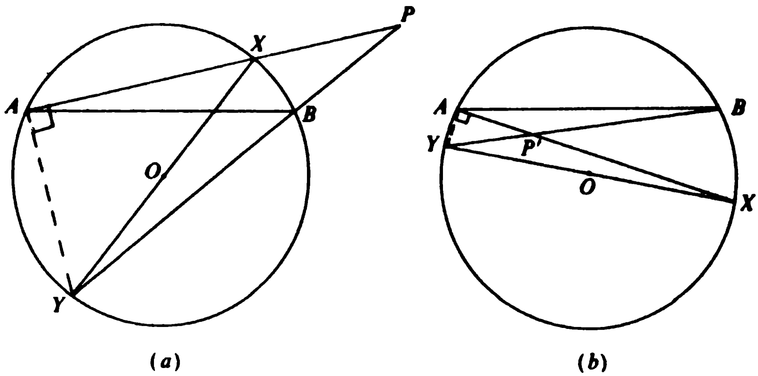
۴. (۱۹۷۶/۲). A و B دو نقطهٔ ثابت از محیط دایره و XY قطر متغیری از آن است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای راست AX و BY. می‌توانید فرض کنید که، AB، قطر دایره نیست.

حل. درشکل ۱۳، دو موقعیت از قطر متغیر XY نشان داده شده است. در هر دو حالت، زاویهٔ XAY برابر ۹۰ درجه و زاویهٔ AYB مقداری ثابت است. بنابراین، درشکل (a)، زاویهٔ APB هم (که متمم AYB است)، مقداری ثابت دارد و، به‌همین‌ترتیب، اندازهٔ زاویهٔ $AP'Y$ درشکل (b)، ثابت است (زیرا متمم زاویهٔ AYB است). زاویهٔ $AP'B$ هم که مکمل زاویهٔ $AP'Y$ است، زاویه‌ای با اندازهٔ ثابت است.

مکان هندسی نقطهٔ P، درشکل (a)، با توجه به ثابت بودن زاویهٔ APB،

---

۱. سیمپلکس (Simplex)، به ساده‌ترین شکل هندسی درفضای n بعدی گویند. مثلاً نقطهٔ پاره‌خط راست، مثلث و چهاروجهی، به‌ترتیب، درفضاهای ۰، ۱، ۲ و ۳ بعدی.



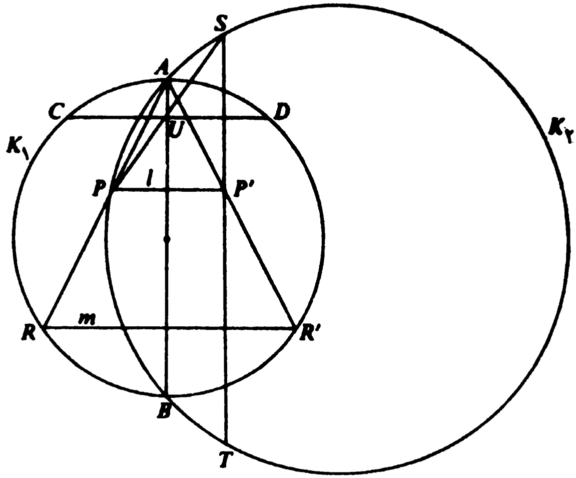
شکل ۱۲

عبارت است از کمان دایره‌ای که از A و B می‌گذرد. به‌همین‌ترتیب، درشکل (b)، با توجه به‌ثابت‌بودن زاویهٔ $AP'B$، نقطهٔ P' روی کمان دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد.

مثلث APY (در شکل (a)) با مثلث $AP'Y$ (درشکل (b)) بـا هم متشابهند و زاویه‌های APB و $AP'B$ مکمل یکدیگرند. بنابراین، P و P' روی یك دایره‌اند. شعاع این دایره، با توجه به قانون سینوس‌ها، برابراست با $r=\frac{AB}{2\sin P}$.

۵. (۱۹۸۶/ ۴). دو دایرهٔ متمایز k_1 و k_2، واقع در یك‌صفحه، یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده‌اند و می‌دانیم، AB قطری از دایرهٔ k_1 است. نقطهٔ P را روی محیط دایرهٔ k_2 و در درون دایرهٔ k_1 درنظر می‌گیریم، تنها بـا استفاده از وسیلهٔ T (که به‌کمك آن می‌توان خط راستی کشید که از دونقطهٔ مفروض می‌گذرد و از نقطهٔ مفروض، عمودی برخط راست مفروض رسم کـرد)، دونقطهٔ C و D را روی محیط دایرهٔ k_1 طوری پیدا کنید که، CD بر AB عمود و اندازهٔ زاویهٔ CPD برابر ۹۰ درجه باشد.

حل. ابتدا نقطهٔ P'، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خـط راست AB را پیدا می‌کنیم (شکل ۱۴). خط راست AP را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دیگر آن بامحیط دایرهٔ k_1 را با R نشان‌می‌دهیم، سپس از نقطه‌های P و R، به‌ترتیب،



شکل ۱۴

عمودهای l و m را برخط راست AB رسم می‌کنیم. خـط‌راست m، محیط دایرهٔ k_1 را درنقطهٔ دیگر R'قطع می‌کند. P' محل برخورد دوخط راست AR' و l است.

اکنون، از نقطهٔ P'، خط راستی عمود بر l رسم می‌کنیم تا دایرهٔ k_2 را درنقطه‌های S و T قطع‌کند. SP را وصل می‌کنیم تا AB را در Uقطع کند. اگر از نقطهٔ U، عمودی بر AB اخراج‌کنیم، وتر مطلوب CD به‌دست می‌آیـد. [می‌توانستیم خط راست TP را رسم‌کنیم، تا AB را در U' قطع کند؛ در این صورت وتر دیگر $C'D'$ به‌دست می‌آمد که باز هم با شرط‌های مساله سازگار بود.]

اثبات. بنا به قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره داریم:

$$SU \cdot UP = AU \cdot UB = CU \cdot UD$$

چون AB پاره‌خط راست PP' را نصف می‌کند، پـاره‌خط راست SP را هم نصف خواهد کرد. بنابراین، $SU = UP$؛ همچنین $CU = UD$.ازاین‌جا نتیجه‌می‌شود: $SU = CU$. به‌این‌ترتیب، Uمرکز دایره‌ای‌است که ازنقطه‌های C و P و D می‌گذرد و $\widehat{CPD}$ زاویه‌ای قائمه است.

۰۶ (۵/۱۹۷۲). در پنج ضلعی محدب $ABCDE$ می‌دانیم مساحت هریك ازپنج مثلث ABC، BCD، CDE، DEA و EAB برابر واحداست. ثابت‌کنید، همهٔ پنج ضلعی‌های محدب بـا این ویژگی، مساحت‌هایی برابر دارند، مقدارِاین مساحت‌را پیداکنید. درضمن، ثابت‌کنید، بی‌نهایت‌پنج‌ضلعی با این ویژگی وجود دارند که هم‌نهشت نیستند.

حل. $[ABC]$را به‌معنای‌مساحت‌مثلثABCمی گیریم. چون (شکل۱۵):

$$[EDC]=[BDC]=۱$$

بنابراین، ارتفاع‌های وارد بر ضلع CD در این‌دو مثلث، طولی برابردارند و از آن‌جا $CD||EB$. به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود که هر قطر پنج‌ضلعی با یکی از ضلع‌های آن، موازی است. چهارضلعی $ABPE$ متوازی‌الاضـلاع است و $۱=[PEB]$. فرض می کنیم:

$$x=[PDC] \quad \text{و} \quad y=[BPC]=[EDP]$$

داریم: $x+y=۱$ و

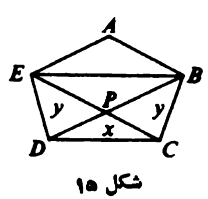
$$\frac{[EDP]}{[EPB]}=\frac{DP}{PB}=\frac{[PDC]}{[PCB]} \text{ یا } \frac{y}{۱}=\frac{x}{y}$$

بین دو معادلهٔ $x+y=۱$ و $\frac{x}{y}=\frac{y}{۱}$، مجهول x را حذف می کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$y^۲+y-۱=۰ \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},\ x=y^۲=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

از این‌جا، برای S، مساحت پنج‌ضلعی، خواهیم داشت:

$$S=y+x+y+۲=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$$



شکل ۱۵

برای این‌که نشان دهیم، بی‌نهایت پنج‌ضلعی ناهم‌نهشت از این‌گونه وجود دارد، مثلث دلخواه PDC را با مساحتی برابر x رسم می‌کنیم. CP را از طرف P تا E و DP را ازطرف P تا B امتداد می‌دهیم، به‌نحوی‌که داشته باشیم: $[EDC]=[BDC]=1$. سرانجام $EA \| BD$ و $EC \| AB$ را رسم می‌کنیم. به سادگی روشن می‌شود که، این پنج‌ضلعی، دارای ویژگی مورد نظر است.

یادداشت. موبیوس، در کتاب خود، مسالهٔ کلی پیدا کردن مساحت‌ـ پنج‌ضلعی $ABCDE$ را طرح‌کرده است، با این فرض‌که بدانیم:

$$[ABC]=a،\ [BCD]=b،\ [CDE]=c،\ [DEA]=d،\ [EAB]=e$$

گوس، این‌مساله را حل‌کرد. درواقع، مساحت پنج‌ضلعی $ABCDE$، برابر با ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $t^2-pt+q=0$ است‌که در آن

$$p=a+b+c+d+e،\ q=ab+bc+cd+de+ea$$

۰۷ (۵/۱۹۷۴). مثلث‌های ABC و PQR را مطابق شکل ۲ درنظر می‌گیریم، در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\widehat{ADB}=\widehat{BDC}=\widehat{CDA}=120^\circ$$

ثابت کنید: $x=u+v+w$.

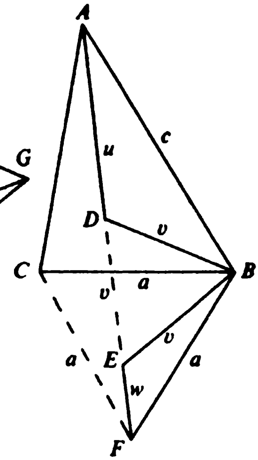
حل. مثلث متساوی‌الاضلاع PQR را رسم و ثابت می‌کنیم، طول هر ضلع آن، برابر است با $u+v+w$.

مثلث BCD را، دورنقطهٔ B، به‌اندازهٔ ۶۰درجه‌درخلاف‌جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا مثلث BFE به‌دست آید (شکل۱۶).

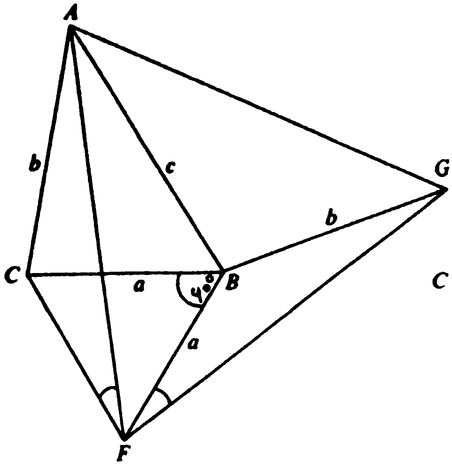
ابتدا توجه‌می‌کنیم که، مثلث‌های BDE و BCF متساوی‌الاضلاع‌اند. بنابراین $DE=v$ و $CF=a$. زاویه‌های ADE و DEF، زاویه‌های نیم‌ـ صفحه‌اند و هریك از آن‌ها برابر است با $60^\circ+120^\circ$. بنابراین

$$AF=u+v+w$$

مثلث متساوی‌الاضلاع AFG را روی‌ضلع AF بنامی‌کنیم (شکل۱۷).داریم:



شکل ۱۶



شکل ۱۷

$$AF=FG\text{،}\ CF=BF\text{،}\ \widehat{CFA}=\widehat{BFG}=60^\circ-\widehat{AFB}$$

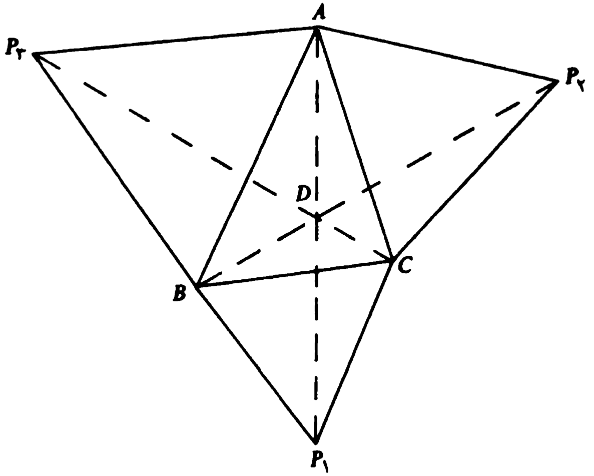
بنابراین، دومثلث CFA و BFG برابرند و $BG=AC=b$. به‌این ترتیب، مثلث AFG، مثلث متساوی‌الاضلاع موردنظر است که ضلعی به‌طول $x=u+v+w$ دارد.

یادداشت. درشکل ۲، ویژگی‌های جالب دیگری هم وجود دارد که، دراین‌جا، آن‌ها را بدون اثبات می‌آوریم.

نقطهٔ D را، مرکز با ۱ زاویه‌ای برابر، در مثلث ABC گویند و آن را می‌توان بارسم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCP_1، CAP_2 و ABP_3 دربیرون مثلث ABC پیداکرد (شکل ۱۸).

پاره‌خط‌های راست AP_1، BP_2 و CP_3، طول‌هایی برابر دارند و در نقطهٔ D به‌هم می‌رسند. فرض بر این است که بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC، از ۱۲۰ درجه کمتراست. هرنقطهٔ دیگری در درون‌مثلث درنظر بگیریم، مجموع فاصله‌های آن از سه رأس A و B و C، از مجموع فاصله‌های نقطهٔ D تااین سه رأس بیشتر است. طول ضلع x را، می‌توان از این رابطه به‌دست آورد:

$$2x^2=a^2+b^2+c^2+4[ABC]\sqrt{3}$$



شکل ۱۸

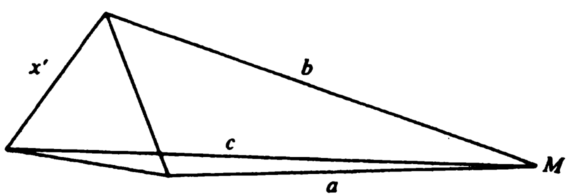
که در آن، $[ABC]$، مساحت مثلث ABC است.

مثلث متساوی الاضلاع دیگری هم می‌توان رسم کرد که نقطهٔ M، در بیرون آن باشد؛ x'، طول ضلع این مثلث، از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$2x^2=a^2+b^2+c^2-4[ABC]\sqrt{3}$$

سرانجام، از خواننده می‌خواهیم، با توجه به شکل ۱۷، ثابت کند:

$$\widehat{ABG}-\widehat{CAB}=\widehat{ABF}-\widehat{ABC}=\widehat{FBG}-\widehat{BCA}=60^\circ$$



شکل ۱۹

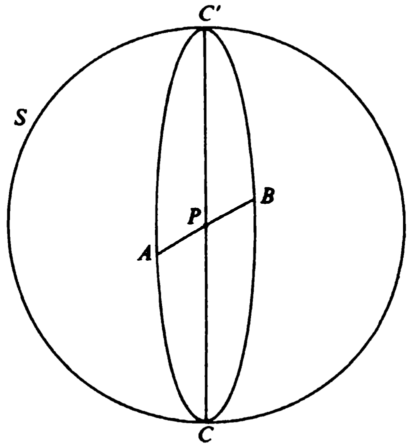
هندسهٔ فضائی

۰۱ (۲/۱۹۷۹). S را دایرهٔ عظیمهٔ کره‌ای به‌قطب P می‌گیریم. روی دایرهٔ عظیمه‌ای که از P می‌گذرد، دو نقطهٔ A و B را به‌یک‌فاصله از P انتخاب می‌کنیم. مثلث‌کروی ABC را (که‌ضلع‌های‌آن، کمان‌هایی از دایره‌های عظیمه‌اند)، درنظر می‌گیریم، به‌نحوی‌که C، نقطه‌ای از S باشد. ثابت کنید، کمان PC از دایرهٔ عظیمهٔ، نیمساز زاویهٔ C است.

یادداشت. دایرهٔ عظیمهٔ‌کره، دایره‌ای‌است‌که مرکز آن بر مرکز کره‌منطبق باشد. قطب دایرهٔ عظیمهٔ S، نقطه‌ای مانند P از سطح کره است، وقتی که، قطری ازکره که از P می‌گذرد، برصفحهٔ دایرهٔ S عمود باشد.

حل. زاویهٔ بین دو کمان CA و CB را، که از نقطهٔ C روی دو دایرهٔ عظیمه رسم شده‌اند، با توجه به‌اندازهٔ هلال بین این دو کمان، اندازه‌گیری می‌کنند (هلال، بخشی از سطح کره است که بین دو دایرهٔ عظیمه واقع‌باشد). به‌این‌ترتیب، طبیعی است‌که به‌کره، از بالای نقطهٔ P نگاه‌کنیم. اثبات را، با توجه به‌تقارن می‌دهیم (شکل ۲۰).

اگر کمان‌های CA، CP و CB را روی دایره‌های عظیمهٔ خود امتداد دهیم، درنقطهٔ C' (که قطب‌مقابل Cنامیده می‌شود)، یکدیگر راقطع‌می‌کنند. OPرا محور دوران می‌گیریم وکره را، به‌اندازهٔ۱۸۰ درجه دور آن دوران می‌دهیم. این دوران، هر دایرهٔ عظیمهٔ به قطب P را، بر خودش‌منطبق می‌کند و تنها جهت آن را تغییر می‌دهد، بنابراین، نقطهٔ B، درجایی از دایرهٔ عظیمه و روی کمانی که از P وA می‌گذرد، قرارمی‌گیرد. چون کمان‌هایAP و BP برابرند، B وA، ضمن این دوران، جای‌خود را باهم عوض می‌کنند؛ به‌همین ترتیب، C و C' هم بایکدیگر عوض‌می‌شوند. در این‌صورت، هلال $ACPC'$ روی هلال $BC'PC$ قرار می‌گیرد، یعنی دوهلال هم‌نهشت‌اند و CC'، زاویه‌های C و C' را نصف می‌کند.



شکل ۲۵

یادداشت. توجه کنیم که

$$\text{arc}\, CA + \text{arc}\, AC' = \text{arc}CA + \text{arc}\, CB = \text{نصف دایرهٔ عظیمه}$$

بنابراین، دایرهٔ عظیمهٔ S، یك بیضی کروی است با کانون‌های A و B.

بیضی کروی با کانون‌های A و B، در کرهٔ مفروض، به عنوان مجموعهٔ نقطه‌های مانند P از سطح کره تعریف می‌شود که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\text{arc}\, PA + \text{arc}\, PB = \text{مقداری ثابت}$$

دراین‌جا، منظور از $\text{arc}\, PA$، کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و P، روی سطح کره است.

۲۰. (۲/۱۹۷۲). چهاروجهی متساوی‌الساقین $ABCD$ داده‌شده است:

$$AB = CD, \ AC = BD, \ AD = BC$$

ثابت‌کنید، همهٔ وجه‌های این چهاروجهی، مثلث‌هایی بازاویه‌های حاده‌اند.

حل. باتوجه به فرض‌ها، معلوم می‌شود که، هرچهار وجه چهاروجهی هم‌نهشت‌اند و هر کنج چهاروجهی در هر رأس، با سه زاویهٔ مختلف ساخته شده است.

M را وسط BC می‌گیریم. داریم:

$$AM+MD>AD=BC=\text{۲}MC$$

مثلث‌های ABC و DCB هم‌نهشت‌اند، پس $AM=DM$، بنابراین

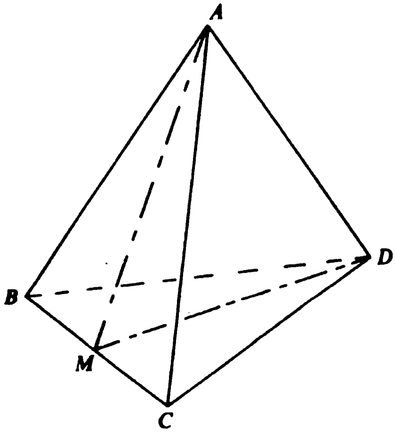
$$\text{۲}MD>\text{۲}MC$$

یعنی MD از شعاع دایرهٔ به‌قطر BC (درصفحهٔ BCD) بزرگتر است. به‌این ترتیب، D درخارج دایره قرار دارد و BDC، زاویه‌ای حاده است. همین استدلال را، در مورد هر زاویهٔ دیگری هم می‌توان به‌کار برد.

راه‌حل دوم. در راه‌حل اول دیدیم که مجموع سه‌زاویهٔ مسطحه، در کنج این چهاروجهی برابر ۱۸۰ درجه است. برای این‌که ثابت کنیم، هر زاویهٔ مسطحهٔ کنج، حاده است، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم و، سپس، حکم مسأله‌را از آن نتیجه می‌گیریم.

قضیه. مجموع هردوزاویهٔ مسطحه ازیک کنج سه‌وجهی، از زاویهٔ مسطحهٔ، سوم بزرگتر است.

این، یکی از قضیه‌های بنیادی در هندسهٔ فضایی است و ما، دراین‌جا، دو اثبات برای آن می‌آوریم.



شکل ۲۱

چون کسینوس در بازهٔ $[0, 180^\circ]$، تابعی نزولی است، بنابراین، باید ثابت کنیم:

$$\cos\widehat{DAC} > \cos(\widehat{DAB} + \widehat{BAC}) =$$

$$= \cos\widehat{DAB}\cdot\cos\widehat{BAC} - \sin\widehat{DAB}\cdot\sin\widehat{BAC} \qquad (1)$$

این بردارها را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB},\ \mathbf{c} = \overrightarrow{AC},\ \mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$$

و با استفاده از تعریف‌های حاصل‌ضرب داخلی و خارجی دو بردار، برابری (۱) را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}) > (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - |\mathbf{b}\times\mathbf{d}||\mathbf{b}\times\mathbf{c}| \qquad (1')$$

ازآن‌جا که

$$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}) =$$

$$= \mathbf{b}\cdot\{\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})\} = \mathbf{b}\cdot\{\mathbf{d}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\} =$$

$$= (\mathbf{b}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$$

و چون

$$|\mathbf{b}\times\mathbf{d}||\mathbf{b}\times\mathbf{c}| > (\mathbf{b}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$$

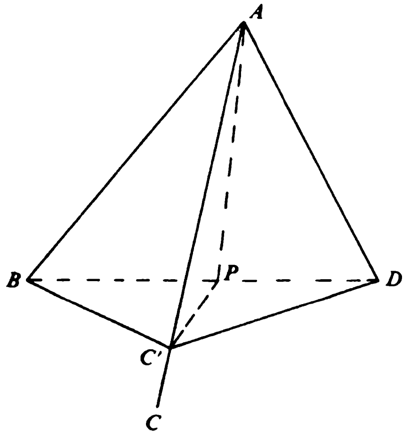
درستی نابرابری مطلوب $(1')$ ثابت می‌شود.

اثبات دوم قضیه را، با روشی مقدماتی از هندسه می‌دهیم.

در شکل ۲۲، BAD را بزرگترین زاویهٔ مسطحهٔ کنج سه‌وجهی به‌رأس A می‌گیریم. کافی است ثابت کنیم:

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAD} > \widehat{DAB}$$

نقطهٔ P را بر BD طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $\widehat{BAP} = \widehat{BAC}$. سپس، C' را بر AC با شرط $AC' = AP$ انتخاب می‌کنیم. دومثلث BAP و BAC' برابر می‌شوند و $BP = BC'$. می‌دانیم



شکل ۲۲

$$BC'+C'D>BD=BP+PD$$

بنابراین $C'D>PD$. این قضیه را درهندسهٔ مسطحه می‌دانیم: «اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع متناظر خود در مثلث دیگر برابر باشند، ولی ضلع سوم آن‌ها، باهم برابرنباشند، آن‌وقت، زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع بزرگتر ازیك‌مثلث بزرگتر است از زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع کوچکتر در مثلث دیگر».

با توجه به‌این قضیه، در دومثلث ADP و DAC'، به‌دست می‌آید:

$$\widehat{C'AD}>\widehat{PAD}$$

و سرانجام

$$\widehat{BAC'}+\widehat{C'AD}=\widehat{BAP}+\widehat{C'AD}>\widehat{BAP}+\widehat{PAD}=\widehat{BAD}$$

۰۳ (۴/۱۹۷۷)، ثابت‌کنید، اگر ضلع‌های روبه‌رو در یك چهارضلعی چپ (چهارضلعی کـه رأس آن روی یك صفحه نیستند)، با هم برابر باشند، آن‌وقت، خط راستی‌که وسط‌های دو قطر را به‌هم وصل می‌کند، بر هر دو قطر عمود است وبرعکس، اگر خط راستی‌که وسط قطرهای یك‌چهارضلعی چپ‌را به‌هم وصل‌می‌کند، بر هردوقطر عمود باشد، آن‌وقت، ضلع‌های روبه‌رو دراین چهارضلعی، باهم برابرند.

حل. در مساله‌ای که بـا طول‌های برابر و عمود بودن برخی عنصرها سروکار داشته باشیم، استفادهٔ از روش برداری مناسب‌تر است.

چهارضلعی‌را $ABCD$ می‌نامیم و بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$، و $\mathbf{d}$را، از یك مبدأ مشترك در نظر می‌گیریم. وسط قطرها، به‌ترتیب، با $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c})$ و $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{d})$ بیان می‌شوند و برداری‌که وسط دوقطر را به‌هم وصل می‌کند با

$$\frac{1}{2}[(\mathbf{a}+\mathbf{c})-(\mathbf{b}+\mathbf{d})]$$

اکنون، می‌توانیم مساله را به‌این‌صورت تنظیم کنیم، اگر داشته‌باشیم:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=(\mathbf{c}-\mathbf{d})(\mathbf{c}-\mathbf{d}) \qquad (۱)$$

$$(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=(\mathbf{a}-\mathbf{d})(\mathbf{a}-\mathbf{d}) \qquad (۲)$$

آن‌وقت داریم:

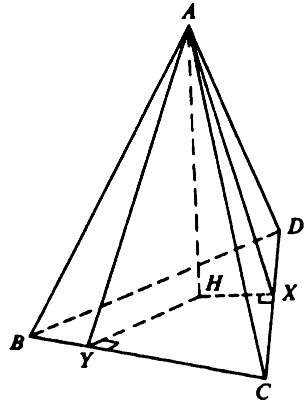
$$[(\mathbf{a}+\mathbf{c})-(\mathbf{b}+\mathbf{d})]\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0 \qquad (۳)$$

$$[(\mathbf{a}+\mathbf{c})-(\mathbf{b}+\mathbf{d})]\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{d})=0 \qquad (۴)$$

و برعکس. اگر (۲) را از (۱) کم کنیم (۳)، و اگر (۲) را با (۱) جمع کنیم (۴) به‌دست‌می‌آید. برعکس، از مجموع (۳) و (۴)، رابطهٔ (۱) و از تفاضل (۳) و (۴)، رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید.

۴. (۴/۱۹۸۳). شش پاره‌خط راست S_1، S_2، S_3، S_4، S_5 و S_6 در یك صفحه داده شده‌اند. ایـن شش پاره‌خـط راست، به‌ترتیب، با یال‌های AB، AC، AD، BC، BD و CD از چهاروجهی $ABCD$ برابرند. چگونه می‌توان به‌کمك پرگار و خطکش، پاره‌خط راستی ساخت که، طول‌آن، برابر با ارتفاع وارد از رأس A در چهاروجهی $ABCD$ باشد؟

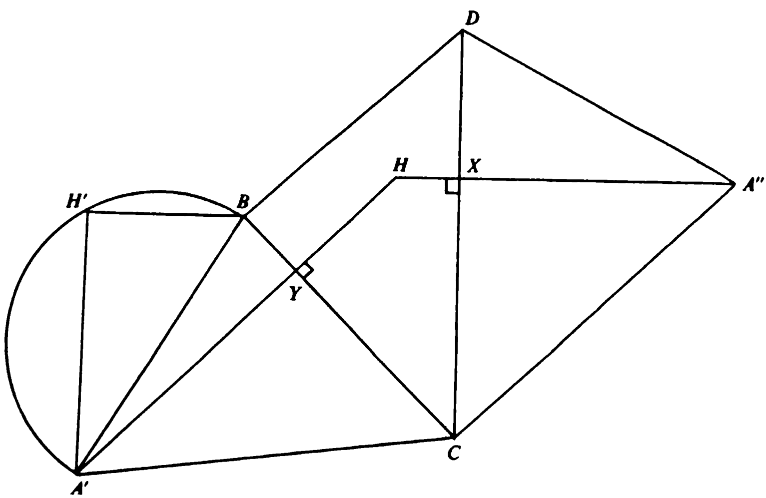
حل. در شکل ۲۳، AH ارتفاع مورد نظر است. صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که از AH بگذرد و بر CD عمودباشد. این‌صفحه، برصفحهٔ BCD عمود است و صفحهٔ ACD را در خط‌راست AX قطع می‌کند. بنابراین CD



شکل ۲۳

بر هردو پاره‌خط‌راست HX و AX عمود می‌شود. به‌همین ترتیب، صفحه‌ای که از AH بگذرد و بر BC عمود باشد، صفحهٔ ABC را در AY قطع‌می‌کند و BC بر هردو پاره‌خط‌راست HY و AY عمود است. درضمن، H را می‌توان به‌عنوان نقطهٔ برخورد دوخط‌راست درصفحهٔ BCD به‌دست آورد: خط‌راست اول، فصل مشترك صفحهٔ BCD با صفحه‌ای است که از A بگذرد و بر CD عمود باشد؛ خط‌راست دوم، فصل مشترك صفحهٔ BCD با صفحه‌ای است که از A بگذرد و بر BC عمود باشد.

اکنون، چهاروجهی را در امتداد یال‌های AB، AC و AD می‌بریم تا در صفحهٔ گسترش یابد. مثلث‌های ABC و ACD را، طبق شکل ۲۴، در صفحهٔ BCD قرار می‌دهیم. رأس A ازمثلث ABC به نقطهٔ A' و رأس Aاز مثلث ACD به نقطهٔ A'' در صفحهٔ BCD می‌روند. همهٔ این وجه‌های مثلثی، قابل رسم‌اند (زیرا، ضلع‌های آن‌ها معلوم‌اند). نقطهٔ H در محل برخورد خطهای راست $A''X$ (عمود بر CD) و $A'Y$ (عمود بر BC) واقع است. به‌شکل۲۳ برمی‌گردیم. AHB مثلثی قائم‌الزاویه است به‌وتر AB و دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ BH وAH. بنابراین، ارتفاع مطلوبAH، نظیر $A'H$ درشکل۲۴است. نیم‌دایره به‌قطر$A'B$را رسم‌می‌کنیم‌و روی آن$BH' = BH$ را مشخص می‌کنیم.



شکل ۲۴

۵۰ (۱۹۸۱/۴). مجموع زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های یك کنج چندوجهی محدب، برابر است با مجموع همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ رأس کنج. ثابت کنید، این کنج، یك کنج سه‌وجهی است.

حل. برای بحث و تفسیر مساله‌های مربوط به کنج چندوجهی P، می‌توان از چندضلعی کروی P' استفاده کرد که از برخورد P با کره‌ای به‌شعاع واحد و به‌مرکز رأس P به‌دست می‌آید. (که در کتاب‌های مربوط به‌مثلثات کروی، به تفصیل دربارهٔ آن صحبت شده است). اگر P محدب باشد، P' هم محدب است. ضلع‌ها و زاویه‌های P'، به‌ترتیب با زاویه‌های مسطحهٔ رأس P و فرجه‌های متناظر برابرند؛ به‌خصوص، برای کنج سه‌وجهی می‌توانیم به یك مثلث کروی برسیم. از آن‌جا که در مثلث کروی، مجموع هردوضلع، از ضلع سوم بزرگتر است، می‌توان به‌این نتیجه رسید که، درهر کنج سه‌وجهی، مجموع هردو زاویهٔ رأس کنج، از زاویهٔ سوم بزرگتر است (حکمی که در مسالهٔ ۲ همین بخش، با آن سروکار داشتیم).

به‌این ترتیب، مسالهٔ ما با مسالهٔ زیر هم‌ارز است: همهٔ چندضلعی‌های

کروی را مشخص کنید، به نحوی که در هر کدام از آن‌ها، مجموع اندازه‌های همهٔ ضلع‌ها، با مجموع اندازه‌های همهٔ زاویه‌ها، برابر باشد. چون در مسالهٔ ما، P' محدب است، مجموع ضلع‌های آن، نمی‌تواند از ۳۶۰ درجه(محیط دایرهٔ عظیمه) بیشتر باشد. واین، به‌معنای آن‌است که مجموع‌زاویه‌های‌مسطحهٔ رأس P، از ۳۶۰درجه تجاوز نمی‌کند (اثبات مستقیم هندسی این حکم را، درپایان خواهیم آورد). مجموع زاویه‌های هرمثلث کروی، همیشه از ۱۸۰ درجه بیشتر است. اگر P' دارای n ضلع باشد، می‌توان آن‌را به $(n-۲)$ مثلث کروی تقسیم کـرد. بنابراین، مجموع زاویه‌های مسطحهٔ رأس P، از $(n-۲)۱۸۰^\circ$ بیشترمی‌شود (توجه کنیم، طبق‌فرض مساله، مجموع‌زاویه‌های مسطحهٔ رأس P، با مجموع زاویه‌های دووجهی آن، برابر است). بنابراین، باید داشته باشیم:

$$(n-۲).۱۸۰^\circ < ۳۶۰^\circ$$

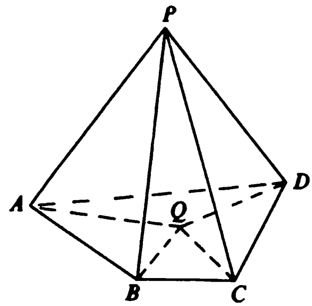
از این‌جا، برای n، حداکثر، عدد ۳ به دست می‌آید. نمونهٔ کنج سه‌وجهی، با این ویژگی را، می‌توان از روی مثلث کروی سه‌قائمه‌ای به‌دست آورد که هرضلع و هر زاویهٔ آن، برابر است با ۹۰درجه.

اکنون به‌روش دیگری برای اثبات این حکم می‌پردازیم که: مجموع زاویه‌های مسطحه، در رأس هر کنج چندوجهی، از ۳۶۰ درجه‌کمتر است.

برای سادگی‌کار، یك کنج چهاروجهی در نظر می‌گیریم (اگرچه،این اثبات را نمی‌توان، عیناً درمورد یك‌کنج n وجهی به‌کار برد). $PABCD$را، یك کنج چهاروجهی محـدب و Q را نقطـه‌ای در درون چندضلعی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۲۵).

درهر کنج سه‌وجهی، مجموع هردو زاویه از زاویهٔ سوم بزرگتراست. نابرابری‌های زیر، با درنظر گرفتن چهار کنج سه‌وجهی به رأس P، به دست می‌آیند:

$$\widehat{PBA}+\widehat{PBC}>\widehat{ABC},$$
$$\widehat{PCB}+\widehat{PCD}>\widehat{BCD},$$



شکل ۲۵

$$\widehat{PDC}+\widehat{PDA}>\widehat{CDA},$$

$$\widehat{PAD}+\widehat{PAB}>\widehat{DAB},$$

این‌نابرابری‌ها را باهم جمع‌می‌کنیم. همچنین برابری‌های زیر را هم، باهم جمع می‌کنیم:

$$\widehat{PBA}+\widehat{PAB}=180^\circ-\widehat{APB},$$

$$\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=180^\circ-\widehat{BPC},$$

$$\widehat{PCD}+\widehat{PDC}=180^\circ-\widehat{CPD},$$

$$\widehat{PDA}+\widehat{PAD}=180^\circ-\widehat{DPA},$$

مجموع سمت چپ، در نابرابری‌ها وبرابری‌ها، یکی است. بنابراین، داریم:

$$720^\circ-(\widehat{APB}+\widehat{BPC}+\widehat{CPD}+\widehat{DPA})>$$

$$>\widehat{ABC}+\widehat{BCD}+\widehat{CDA}+\widehat{DAB}=360^\circ$$

و از آن‌جا

$$360^\circ>\widehat{APB}+\widehat{BPC}+\widehat{CPD}+\widehat{DPA}$$

۶۰ (a.(۴/۱۹۷۸ ثابت کنید، اگر زاویه‌هـای مسطحهٔ شش فرجه از یك چهاروجهی، با هم برابر باشند، این چهاروجهی منتظم است.

b) اگر تنها پنج‌فرجه، زاویه‌های مسطحهٔ برابر داشته باشند، آیا بازهم چهاروجهی منتظم است؟

حل. a) از بحثی که در مسالهٔ قبل داشتیم، استفاده می‌کنیم. کره‌ای به مرکز یکی از رأس‌های چهاروجهی، و مثلاً رأس A، درنظر می‌گیریم. کنج سه‌وجهی به‌رأس A، در برخورد با کره، یك مثلث کروی به وجود می‌آورد که، زاویه‌های آن، با زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های کنج برابرند و، بنابراین طبق فرض‌مساله، باید سه‌زاویهٔ مثلث کروی با هم‌برابر باشند. هرمثلث کروی با سه زاویهٔ خود، مشخص می‌شود (تنها یك مثلث کروی با سه زاویهٔ معلوم، وجود دارد). مثلث کـروی با زاویه‌های بـرابـر، متساوی‌الاضلاع است، بنابراین زاویه‌های مسطحهٔ به رأس A درکنج سه‌وجهی باهمین رأس، با هم برابرند. هرکدام از این‌زاویه‌ها را α می‌نامیم. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، زاویه‌های‌مسطحهٔ به‌رأسB،یا به‌راس Cو یا به‌رأس Dهم با یکدیگر برابرند، آن‌ها را به ترتیب β، γ و δ می‌نامیم. از آن‌جا که مجموع زاویه‌های مثلث چهاروجه در چهاروجهی $ABCD$، برابراست‌با ۱۸۰×۴، یعنی ۷۲۰درجه، بنابراین

$$۳(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=۷۲۰^\circ \quad \text{یا} \quad a+\beta+\gamma+\delta=۲۴۰^\circ$$

چون مجموع هـر سه زاویهٔ دلخواه از زاویه‌های α، β، γ و δ برابر ۱۸۰ درجه است، درنتیجه: $\alpha=\beta=\gamma=\delta=۶۰^\circ$. به‌این ترتیب، همهٔ وجه‌های چهاروجهی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی، هم‌نهشت با یکدیگر می‌شوند، یعنی چهاروجهی منتظم است.

b) بردارهـای واحد $\mathbf{k}$، $\mathbf{l}$، $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ را، عمود بر وجه‌ها و درخـارج چهاروجهی در نظر می‌گیریم. زاویهٔ بین هر دو بردار از ایـن چهار بردار، مکمل زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ متناظر باآن است. بنابراین، در چهاروجهی منتظم، انتهای این بردارهای واحد، نقطه‌هایی بـا فاصله‌های برابر، روی سطح کرهٔ

به‌شعاع واحدند، یعنی بین دو به‌دوی این نقطه‌ها، شش کمان دایرهٔ عظیمه وجود دارد که همهٔ آن‌ها، ازمرکز، بازاویهٔ θ دیده‌می‌شوند و، درضمن، طولی برابر دارند [به‌سادگی معلوم می‌شود که $\theta = \text{arc}\ cos(-\frac{۱}{۳})$]. اگر بتوانیم، چهار نقطه‌را روی کرهٔ به‌شعاع واحد، به‌نحوی پیدا کنیم که ۵ فاصله از ۶ فاصلهٔ بین دو به‌دوی آن‌ها، باهم برابر باشند، ولی فاصلهٔ ششمی با آن‌ها فرق داشته باشد، آن‌وقت، صفحه‌های مماس برکره در این‌نقطه‌ها، یك چهاروجهی را تشکیل می‌دهند که ۵ فرجه، و تنها ۵ فرجهٔ آن، با هم برابرند.

این کار را می‌توانیم، با تعویض جای نقطه‌های متساوی‌الفاصله انجام دهیم. نقطه‌های جدید K'، L' و M' را طوری درنظر می‌گیریم که، دوباره یك مثلث کروی متساوی‌الاضلاع بسازند، ولی با طول ضلع، $\theta' < \theta$. N' را طوری انتخاب می‌کنیم که به‌فاصلهٔ θ' از K' و L' باشد. دراین صورت فاصلهٔ N' از M' برابر با θ' نمی‌شود، زیرا، بنا به‌اثبات a)، اگر این فاصله هم برابر θ' شود، آن‌وقت با یك‌چهاروجهی منتظم سروکار داریم، درحالی‌که برای چهاروجهی منتظم، این فاصله‌ها، باید برابر با θ باشند. به این ترتیب، باید به‌پرسش b) پاسخ منفی داد.

برای a)، راه‌حل دومی را هم می‌آوریم.

راه‌حل دوم. a). O را مرکز کرهٔ محاطی و A'، B'، C'، D' را نقطه‌های مشترك این کره، به ترتیب، بـا وجه‌های متقابل بـه رأس‌های A، B، C، D می‌گیریم. اگر بردارهایی را در نظر بگیریم که از O به نقطه‌های A'، B'، C' و D' وصل شده‌اند وآن‌ها را، به ترتیب، $\mathbf{a}'$، $\mathbf{b}'$، $\mathbf{c}'$ و $\mathbf{d}'$ بنامیم، زاویهٔ بین هر دوتا از آن‌ها، مکمل زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ متناظر با آن خواهد بود، و بنابراین، همهٔ این گونه زاویه‌ها با هم برابرند. ازآن‌جاکه طول این بردارها یکی است (برابر با شعاع کره)، شش فاصلهٔ $A'B'$، $A'C'$، ...، $C'D'$ باهم برابر می‌شوند. به‌زبان دیگر، $A'B'C'D'$، یك‌چهاروجهی منتظم است.

برای این‌که به‌منتظم‌بودن خود چهاروجهی $ABCD$ قانع شویم، توجه می‌کنیم که وجه‌های آن، درنقطه‌های A'، B'، C' و D' بر کـره مماس‌اند.

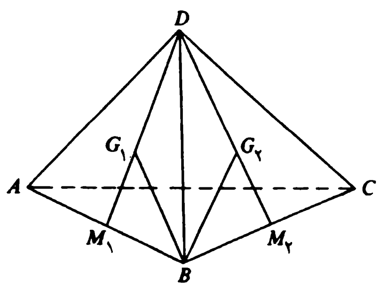
بنابراین، وجه‌های چهاروجهی $ABCD$، در هر دورانی که چهار وجهی $A'B'C'D'$ را ثابت نگه دارد، تغییر نمی‌کنند، یعنی $ABCD$، منتظم است.

۰۷ (۴/۱۹۸۰). کره‌ای که در یک چهاروجهی محاط شده است، بر هر وجه چهاروجهی، درمرکز هندسی آن مماس است. ثابت کنید، این چهاروجهی منتظم است.

حل. G_1 و G_2 را مرکزهای هندسی و DG_1M_1 و DG_2M_2 را، به‌ترتیب، میانه‌های مثلث‌های DAB و DBC می‌گیریم.

چون مماس‌هایی که از یک نقطهٔ واقع درخارج کره، برآن رسم شوند، طول‌هایی برابر دارند، بنابراین $DG_1=DG_2$ و $BG_1=BG_2$. بنابراین، دومثلث DBG_1 و DBG_2 برابرند و $\widehat{BDG_1}=\widehat{BDG_2}$. از آن‌جا که $DM_1=\frac{3}{2}DG_1$ و $DM_2=\frac{3}{2}DG_2$، بنابراین دومثلث DBM_1 و DBM_2 برابرند و $BM_1=BM_2$ و همچنین $BA=BC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، هر دویال مجاور، طول‌های برابر دارند، یعنی چهاروجهی منتظم است.

راه‌حل دوم. $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را، بردارهای ازمرکز کرهٔ محاطی، به‌ترتیب، به راس‌های A، B، C و D می‌گیریم. بردار نقطهٔ G مرکزهندسی مثلث ABC، از رابطهٔ $\mathbf{g}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ به‌دست‌می‌آید. بنابرفرض داریم $|\mathbf{g}|=r$، (r، شعاع کرهٔ محاطی چهاروجهی است). بنابراین



شکل ۲۶

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^{۲}=۳\ \mathbf{g}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=۹r^{۲}$$

و یا

$$\mathbf{g}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{g}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{g}\cdot\mathbf{c}=۳r^{۲} \qquad (۱)$$

همچنین، بنا به فرض، $\mathbf{g}$ بر صفحهٔ ABC و، بنابراین، بر هر خط راست واقع در صفحهٔ ABC عموداست. از این‌رو، حاصلضرب‌های داخلی $\mathbf{g}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ و $\mathbf{g}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ برابر صفرند و به‌دست می آید: $\mathbf{g}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{c}=r^{۲}$ (با توجه به برابری (۱)) و یا

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}=۳r^{۲} \qquad (۲)$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان به‌نتیجه‌های مشابهی برای ضلع‌های دیگر رسید؛ مثلاً برای ABD داریم:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})\cdot\mathbf{c}=۳r^{۲} \qquad (۳)$$

از (۲) و (۳) به‌دست می آید: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$. به‌همین‌ترتیب، به‌دست‌می آید:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\lambda^{۲}$$

از رابطهٔ (۲) داریم: $|\mathbf{a}|^{۲}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=۳r^{۲}$. یعنی $|\mathbf{a}|^{۲}=۳r^{۲}-۲\lambda^{۲}$ و به‌همین‌ترتیب:

$$|\mathbf{b}|^{۲}-|\mathbf{c}|^{۲}=|\mathbf{d}|^{۲}=۳r^{۲}-۲\lambda^{۲}$$

مربع طول یال AB، برابر است با

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^{۲}=|\mathbf{a}|^{۲}+|\mathbf{b}|^{۲}-۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=۶r^{۲}-۶\lambda^{۲}$$

به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود که، طول‌هر یال دیگر چهاروجهی هم، همین‌مقدار است، یعنی با چهاروجهی منتظم سروکار داریم.

یادداشت. درمسالهٔ بالا، می‌توان به‌جای‌مرکزهای هندسی وجه‌ها،فرض کردکه‌کرهٔ محاطی چهاروجهی، بر چهاروجه آن در (I) مرکزهای دایره‌های محاطی وجه‌ها،(II) محل برخوردسه‌ارتفاع وجه‌ها، (III) مرکزهای‌دایره‌های

محیطی وجه‌ها، مماس است. به‌عنوان تمرین ثابت کنید: در حالت‌های (I) و (II) چهاروجهی منتظم است، ولی در حالت (III)، با یک چهاروجهی متساوی‌الساقین سروکار داریم (یعنی یال‌های روبه‌رو در آن، باهم برابرند).

۸. (۱۹۸۲/۵). A و B و C، سه نقطهٔ واقع در درون کرهٔ S هستند، به‌نحوی‌که AB و AC، بر قطری از کرهٔ S که از A می‌گذرد، عمودند. دو کره از نقطه‌های A و B و C گذرانده‌ایم که، هردوی آن‌ها، بر کرهٔ S مماس‌اند. ثابت کنید، مجموع شعاع‌های این دو کره، برابر با شعاع کرهٔ S است.

حل. راه‌حل اول را، با روش هندسهٔ تحلیلی می‌دهیم. باید دستگاه مختصات مناسبی انتخاب کنیم. هر کرهٔ S' که از نقطه‌های A و B و C بگذرد، شامل دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. بنابراین، O'، مرکز کرهٔ S'، بر خط راستی قرار دارد که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC (نقطهٔ D) می‌گذرد و بر صفحهٔ آن عمود است. دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که مرکز کرهٔ S، منطبق بر مبداء مختصات O، محور طول منطبق بر امتداد OA، و O' و D واقع بر صفحهٔ xy باشد؛ شعاع کرهٔ S را به عنوان واحد در نظر می‌گیریم. معادلهٔ کرهٔ S، به‌صورت $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ درمی‌آید.

مختصات نقطه‌های O'، D و A را، به‌ترتیب، $(t، d، ۰)$ و $(a، d، ۰)$، $(a، ۰، ۰)$ فرض می‌کنیم (d، a، ثابت‌های مفروض‌اند). معادلهٔ کرهٔ S'، چنین است:

$$(x-t)^۲+(y-d)+z^۲=r^۲$$

که باید، در آن، t و r (شعاع کرهٔ S') را محاسبه کنیم. چون S' شامل نقطهٔ A است، بنابراین

$$r^۲=(a-t)^۲+r^۲ \qquad (۱)$$

S' بر S مماس است، بنابراین فاصلهٔ بین دو مرکز کره، برابر $r-۱$ (تفاضل دو شعاع) است:

$$(۱-r)^۲=t^۲+d^۲ \qquad (۲)$$

اگر (۱) را از (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید: $۲at-a^۲=۲r-۱$؛ بنابراین

$$t-a=\frac{(1-2r-a^2)^2}{2a} \qquad (3)$$

با توجه به (۳) و (۱) به‌دست می‌آید:

$$(1-a^2)r^2-(1-a^2)r+a^2d^2+\frac{1-a^2}{4}=0$$

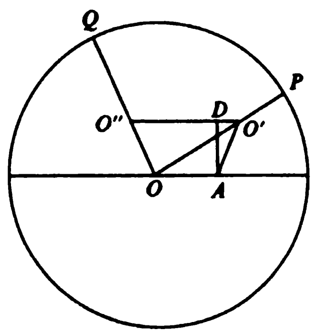
که معادلهٔ درجه دومی است نسبت به r، و مجموع دوریشهٔ آن $r_1+r_2=1$.
همچنین، از (۳) به‌دست می‌آید: $t_1+t_2=a$.

راه‌حل دوم. مساله را می‌توان با روش هندسی حل کرد. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را D می‌گیریم و به صفحه‌ای توجه می‌کنیم که از خط راست OA و نقطهٔ D بگذرد. مقطع این صفحه، با کرهٔ S و دو کرهٔ داخلی مماس بر S، درشکل ۲۷ داده شده است.

نقطه‌های O' و O''، مرکزهای دوکره‌ای که از A و B و C گذشته‌اند، بر خط راستی قرار دارندکه از D می‌گذرد و با OA موازی است. P و Q را، نقطه‌های تماس دوکره، با S فرض می‌کنیم. باید داشته باشیم:

$$AO'=O'P=r_1,\quad AO''=O''Q=r_2,$$
$$OO'=r-r_1 \text{ یا } OO'+AO'=r, \qquad (4)$$
$$OO''=r-r_2 \text{ یا } OO''+AO''=r$$

(r، r_1 و r_2، شعاع‌های سه کره‌اند). با توجه به (۴)، معلوم می‌شودکه O' و



شکل ۲۷

O'' بر محیط یك بیضی به کانون‌های O و A قرار دارند. چون $O'O''$ با OA موازی است، با توجه به‌متقارن‌بودن بیضی نتیجه می‌شود که ذوزنقهٔ $OAO'O''$ متساوی‌الساقین است، یعنی $OO' = AO''$ و سرانجام

$$r_1 + r_2 = O'P + OO' = r$$

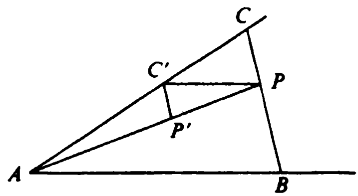
نابرابری‌های هندسی

۰۱ (۴/۱۹۷۹). نقطهٔ P در درون زاویهٔ مفروض A واقع است (شکل ۷). چگونه می‌توان خط راستی از نقطهٔ P گذراند، به نحوی که ضلع‌های زاویه را در نقطه‌های B و C قطع کند و مقدار $\frac{1}{BP}+\frac{1}{PC}$، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

حل. PC' را موازی AB و $C'P'$ را موازی BC رسم می‌کنیم (شکل ۲۸). دو‌مثلث $AP'C'$ و APC و، همچنین، دو‌مثلث $PC'P'$ و ABP متشابه‌اند، داریم:

$$\frac{P'C'}{PC}=\frac{AP'}{AP} \quad \text{و} \quad \frac{P'C'}{BP}=\frac{P'P}{AP}$$

از مجموع این دو برابری، به‌دست می‌آید:



شکل ۲۸

$$\frac{P'C'}{BP}+\frac{P'C'}{PC}=\frac{AP'+P'P}{AP}=1$$

و از آن‌جا

$$\frac{1}{BP}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{P'C'}$$

و حداکثر این‌مقدار وقتی به‌دست می‌آید که، مقدار $P'C'$، حداقل باشد. و $P'C'$ وقتی می‌نیمم است که بر AP عمود باشد. بنابراین، باید BC را عمود بر AP رسم کرد.

یادداشت. این مساله، حالت خاصی از مسالهٔ کلی پیدا کردن ماکزیمم و می‌نیمم برای تابع $F(AB، AC، BP، PC)$ است که، در آن، زاویهٔ A و تابع F، مفروض‌اند. برخی از این‌گونه مساله‌ها را می‌آوریم:

۱) نقطهٔ P در درون زاویهٔ A داده شده است. از P، خط راستی‌طوری رسم کنید که دوضلع زاویه را در B و C قطع کند و $BP.PC$ می‌نیمم باشد. [برای پیدا کردن جواب، باید مثلث ABC، متساوی‌الساقین باشد.]

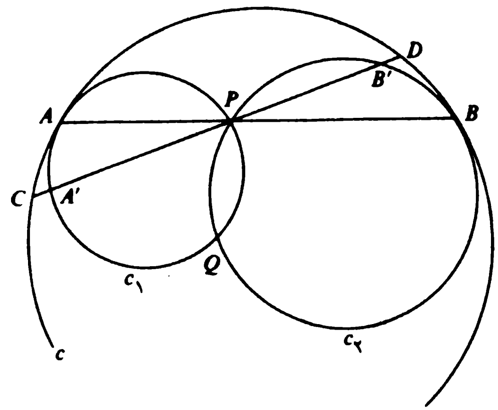
۲) با همان شرطهــا، می‌خواهیم مساحت مثلث ABC می‌نیمم باشد. [خط‌راست APA' را طوری رسم کنید که داشته‌باشیم: $PA'=PA$. سپس، متوازی‌الاضلاع به‌قطر AA' و ضلع‌های موازی با AB و AC را رسم کنید.]

۳) با همان شرطها، محیط مثلث ABC می‌نیمم باشد.

۴) با همان شرطها، طول پاره‌خط راست BC می‌نیمم باشد.

۰۲ (۴/۱۹۷۵). دو دایره در نقطه‌های P و Q متقاطــع‌اند. چگونه می‌توان پاره‌خط راست AB را رسم‌کرد (شکل۳را ببینید)، به‌نحوی که ازنقطهٔ P بگذرد، دو دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند و حاصل‌ضرب $PA.PB$، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

حل. c_1 و c_2 را دو دایرهٔ مفروض می‌گیریم. ابتدا ثابت می‌کنیم، اگر APB جواب مساله باشد، دایره‌ای مانند c وجود دارد که بر دایره‌های c_1 و c_2، در نقطه‌های A و B مماس است. سپس روش پیدا کردن نقطه‌های A و B را نشان می‌دهیم.



شکل ۲۹

$A'P$ و PB' را دو وتر دیگر از دایره‌های c_1 و c_2 می‌گیریم که بریک امتداد باشند و فرض می‌کنیم، امتداد این‌وترها، دایرهٔ c را درنقطه‌های CوD قطع کنند. داریم: $CP.PD = AP.PB$ و بنابراین (شکل ۲۹)

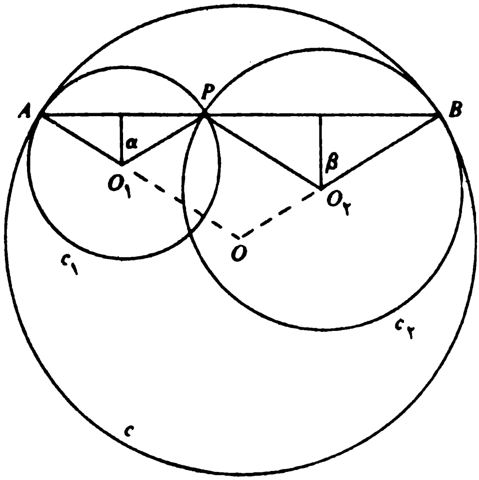
$$AP.PB > A'P.PB'$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

در شکل ۳۰، دایرهٔ c، مماس بر c_1 در نقطهٔ A و مماس بر c_2 درنقطهٔ B است. این دایره وقتی وجود دارد که داشته باشیم: $\alpha = \beta$ که، در آن، α و β به‌ترتیب، نصف زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به‌کمان‌های AP وBPهستند.

روش ساختمان: O را رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی می‌گیریم که، سه رأس آن، O_1 و P و O_2 باشند.Aنقطهٔ برخورد OO_1 با c_1 وB نقطهٔ برخورد OO_2 با c_2 است. می‌بینیم که، دراین‌صورت، دایرهٔ c، به مرکز نقطهٔ O و به شعاع برابر مجموع شعاع‌های دو دایرهٔ c_1 و c_2 است. بریک استقامت بودن نقطه‌های A، P وB، نتیجه‌ای از تشابه مثلث‌های AO_1P و AOBاست.

راه‌حل دوم. چون $AP = 2\sin\alpha$ و $BP = 2\sin\beta$، در واقع باید ماکزیمم $\sin\alpha\sin\beta$ را پیدا کنیم. از آن‌جا که $\widehat{O_1PO_2}$، زاویه‌ای ثابت است، مجموع $\alpha+\beta$، مقداری ثابت می‌شود. از طرف دیگر داریم:



شکل ۳۵

$$۲\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

و چون کسینوس، تابعی نزولی است، حداکثر $\cos(\alpha-\beta)$ وقتی بـه دست می‌آید که داشته باشیم: $\beta=\alpha$. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$AO_۱\|PO_۲ \text{ و } BO_۲\|PO_۱$$

دنبالهٔ کار، شبیه راه‌حل اول است.

۰۳ (۳/۱۹۸۱). اگر A و B و C زاویه‌های یك مثلث باشند، ثابت کنید:

$$-۲\leqslant \sin ۳A+\sin ۳B+\sin ۳C\leqslant\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

درچه حالت‌هایی به‌برابری می‌رسیم؟

حل. بدون این‌که به‌کلی‌بودن مساله، لطمه‌ای واردشود، می‌توان فرض کرد: $A\leqslant B\leqslant C$.

I) برای اثبات نابرابری سمت چپ، توجه می‌کنیم که

$$A\leqslant ۶۰^\circ،\ \sin ۳A\geqslant ۰،\ \sin ۳B\geqslant -۱،\ \sin ۳C\geqslant -۱$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\geqslant -2$$

برای رسیدن به برابری، باید داشته باشیم:

$$\sin 3A=0,\ \sin 3B=\sin 3C=-1$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $A=0$ و $B=C=90^\circ$ (حالت حدی یک‌مثلث متساوی‌الساقین).

II) بـه اثبات نابرابری سمت راست می‌پردازیم. روشن است کـه: $2<\frac{3\sqrt{3}}{2}$. هرکدام از جمله‌های $\sin 3A$، $\sin 3B$ و $\sin 3C$، حداکثر برابر واحدند. برای این‌که، مجموع آن‌ها ماکزیمم باشد، باید هر سه جمله مثبت باشند. چون $A+B+C=180^\circ$، باید داشته باشیم:

$$0^\circ<A\leqslant B<60^\circ,\ 120^\circ<C<180^\circ$$

فرض می‌کنیم: $D=C-120^\circ$، بنابراین

$$3A+3B+3D=180^\circ$$

و بنابر نابرابری ین‌سن (Jensen) دربارهٔ تابع‌های محدب

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3D\leqslant 3\sin\frac{3A+3B+3D}{3}=$$

$$=3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

و برابری تنها وقتی برقرار است‌که داشته باشیم:

$$3A=3B=3D=60^\circ$$

یعنی $A=B=20^\circ$ و $C=140^\circ$.

رابطهٔ(۱)، مفهوم هندسی جالبی‌دارد: از بین همهٔ مثلث‌های قابل‌محاط در یـک دایرهٔ مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای حداکثر محیط است

(دراین‌جا، $3A$، $3B$ و $3D$ به‌جای زاویه‌های مثلث درنظر گرفته شده‌اند).

نابرابری سمت راست مساله را، می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد:

$$|qr\sin nA+rp\sin nB+pq\sin nC|\leqslant (p^2+q^2+r^2)\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

که در آن $p, q, r \geqslant 0$ و n عددی درست و مثبت است. برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$p=q=r,\ \sin nA=\sin nB=\sin nC=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

برای اثبات این نابرابری، باید از نابرابری زیر آغاز کرد:

$$x^2+y^2+z^2\geqslant(-1)^{m+1}(2yz\cos mA+2zx\cos mB+ +2xy\cos mC) \qquad (3)$$

برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\frac{x}{\sin nA}=\frac{y}{\sin nB}=\frac{z}{\sin nC}$.

دراین‌جا، x و y و z، عددهای حقیقی و A و B و C زاویه‌های یک‌مثلث‌اند.

نابرابری (۳)، نتیجه‌ای از نابرابری روشن زیر است:

$$[x+(-1)^m(y\cos mC+z\cos mB)]^2+(y\sin mC-z\sin mB)^2\geqslant 0$$

به‌خصوص، وقتی m زوج باشد ($m=2n$)، داریم:

$$\cos mA=1-2\sin^2 nA, \ldots$$

و رابطهٔ (۳)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x+y+z)^2\geqslant 4(yz\sin^2 nA+zx\sin^2 nB+xy\sin^2 nC) \qquad (4)$$

اگر x و y و z را، عددهایی غیرمنفی بگیریم‌وفرض کنیم $\sqrt{x}=p$، $\sqrt{y}=q$ و $\sqrt{z}=r$، آن‌وقت، با توجه به مجموع دوری، به‌دست می‌آید:

$$\frac{p^2+q^2+r^2}{12}\geqslant\sum\frac{a^2r^2\sin^2 nA}{3}\geqslant\left(\sum\frac{qr\sin nA}{3}\right)^2$$

نابرابری سمت‌چپ ازنابرابری (۴) و نابرابری سمت راست، از نابرابری واسطهٔ توان‌ها، نتیجه می‌شود.

۴. (۲/۱۹۷۵). A، B، C و D، چهار نقطه از فضا هستند و منظوراز AB، فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B است. ثابت کنید:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2 \geqslant AB^2+CD^2$$

حل. $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را بردارهای بـه مبداء O و، به ترتیب، با انتهای A، B، C و D می‌گیریم. دراین‌صورت، نابرابری مفروض با نابرابری‌زیر، هم‌ارز می‌شود:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2 \geqslant (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2$$

و یا

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d})^2 \geqslant 0$$

و برابری، تنها وقتی برقرار است کـه داشته باشیم: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}+\mathbf{d}$، یعنی وقتی‌که، چهار نقطهٔ مفروض، چهار رأس یك متوازی‌الاضلاع باشند.

می‌توانستیم، درستی نابرابری‌مساله‌را، به‌این‌ترتیب ثابت کنیم. مختصات چهارنقطــه را، در دستگاه مختصــات قائم (x_i, y_i, z_i)، $i=1, 2, 3, 4$، می‌گیریم. دراین‌صورت، باید ثابت‌کنیم:

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2 \geqslant$$
$$\geqslant (x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2 \qquad (1)$$

و نابرابری‌های‌نظیر آن، برای y_i و z_i. نابرابری(۱)، به‌سادگی، به‌نابرابری روشن زیر تبدیل می‌شود:

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)^2 \geqslant 0$$

علاوه‌براین، ثابت می‌کنیم، اگر یال‌های چهاروجهی $ABCD$ را

$$AB=a, AC=b, AD=c, CD=a_1, BD=b_1, BC=c_1$$

فرض کنیم، آن‌وقت، $a+a_1$، $b+b_1$ و $c+c_1$، ضلع یك مثلث با زاویه‌های حاده را تشکیل می‌دهند.

نابرابری‌های مثلثی زیر را، برای وجه‌های چهاروجهی $ABCD$، داریم:

$$a_1+b_1 \geqslant c_1,\ a+b>c_1;\ a_1+b>c,\ a+b_1>c$$

که از مجموع آن‌ها، بعد از ساده کردن، به‌دست می‌آید:

$$(a+a_1)+(b+b_1)>(c+c_1)$$

و به‌همین ترتیب، برای دو نابرابری نظیر آن. بنابراین $a+a_1$، $b+b_1$ و $c+c_1$ می‌توانند ضلع‌های یك مثلث باشند.

از نابرابری اصلی، معلوم می‌شود که $a^2+a_1^2$، $b^2+b_1^2$ و $c^2+c_1^2$ در نابرابری‌های مثلثی صدق می‌کنند. همچنین، با توجه به نابرابری بطلمیوس در فضا، $2aa_1$، $2bb_1$ و $2cc_1$ هم با نابرابری‌های مثلثی سازگارند؛ بنابراین

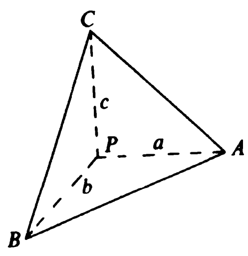
$$(a+a_1)^2,\ (b+b_1)^2,\ (c+c_1)^2$$

هم در نابرابری‌های مثلثی صدق می‌کنند. بـه‌این ترتیب، مثلث بـا ضلع‌های $a+a_1$، $b+b_2$ و $c+c_1$، مثلثی با زاویه‌های حاده است.

۵۰ (۴/۱۹۷۶). اگـر مجموع شش یال در هـرم سه قائمهٔ $PABC$ ($\widehat{APB}=\widehat{BPC}=\widehat{CPA}=90^\circ$)، برابر S باشد، حداکثر مقدار حجم هرم چقدر است؟

حل. $PA=a$، $PB=b$ و $PC=c$ می‌گیریم (شکل ۳۱). در این صورت $BC^2=b^2+c^2$ و غیره. داریم:

$$S=a+b+c+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2} \qquad (1)$$



شکل ۳۱

به‌این‌ترتیب، باید ماکزیمم حجم $V=\frac{1}{6}abc$ را، باتوجه به‌شرط (۱) پیدا کنیم. با توجه به‌نابرابری واسطه‌ها داریم:

$$a+b+c\geqslant 3(abc)^{\frac{1}{3}},\ b^2+c^2\geqslant 2bc$$

و نابرابری‌های مشابه. بنابراین

$$S\geqslant 3(abc)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}+\sqrt{2ab})$$

دوباره، از نابرابری واسطه‌ها، درمورد مجموع داخل پرانتز استفاده‌می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S\geqslant 3(1+\sqrt{2})(abc)^{\frac{1}{3}}=3(1+\sqrt{2})(6V)^{\frac{1}{3}}$$

و سرانجام

$$V_{max}=\frac{S^3}{6\times 3^3(1+\sqrt{2})^3}=\frac{(5\sqrt{2}-7)S^3}{162}$$

و این حجم، وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $a=b=c$.

این مساله را می‌توان تعمیم داد و بـه‌جای هرم چهاروجهی سه قائمهٔ، هرمی‌را درنظر گرفت که سه‌زاویهٔ آن، به‌جای ۹۰ درجه، برابر 2θ باشد. دراین مورد، خواهیم‌داشت: $V=\frac{1}{6}abcn$ که، در آن $n^2=1-3\cos^2 2\theta+2\cos^3 2\theta$ و $BC^2=b^2+c^2-2bc\cos 2\theta\geqslant 2bc(1-\cos 2\theta)=4bc\sin^2\theta$ وغیره. سپس، اگر مثل قبل ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$V_{\max}=\frac{nS^3}{162(1+2\sin\theta)^3}$$

مسالهٔ ما، متناظر است با حالتی که داشته باشیم: $2\theta=90^\circ$.

یادداشت. برای پیدا کردن حجم چهاروجهی $PABC$، برحسب سه‌یال

متقارب آن و زاویه‌های بین این یال‌ها، فرض کنید:

$$\alpha=\widehat{BPC},\ \beta=\widehat{CPA},\ \gamma=\widehat{APB},$$

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{PA},\ \mathbf{b}=\overrightarrow{PB},\ \mathbf{c}=\overrightarrow{PC}$$

مولفه‌های **a** را $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ بگیرید و غیره. دراین‌صورت داریم:

$$۶V_{PABC}=\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ c_۱ & c_۲ & c_۳\end{vmatrix}$$

بنابراین

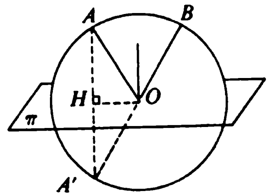
$$۳۶V^۲_{PABC}=\begin{vmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ c_۱ & c_۲ & c_۳\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_۱ & b_۱ & c_۱\\ a_۲ & b_۲ & c_۲\\ a_۳ & b_۳ & c_۳\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{a.a} & \mathbf{a.b} & \mathbf{a.c}\\ \mathbf{b.a} & \mathbf{b.b} & \mathbf{b.c}\\ \mathbf{c.a} & \mathbf{c.b} & \mathbf{c.c}\end{vmatrix}=(abc)^۲\begin{vmatrix}۱ & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & ۱ & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & ۱\end{vmatrix}=$$

$$=(abc)^۲(۱-\cos^۲\alpha-\cos^۲\beta-\cos^۲\gamma+۲\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

۰۶ (۳/۱۹۷۴). دونقطه از سطح کره‌ای به‌شعاع واحد را، به‌وسیلهٔ یك منحنی که از درون کره گذشته است، به‌هم وصل کرده‌ایم. طول این منحنی، از ۲ کمتر است. ثابت کنید، تمامی این منحنی در درون نیم‌کره‌ای از کرهٔ مفروض قرار دارد.

حل. دوانتهای منحنی‌را A و B می گیریم وصفحهٔ Πرا درنظرمی گیریم که از نقطهٔ O، مرکز کره، بگذرد و برنیمساز زاویهٔ AOB عمودباشد. ثابت می‌کنیم، منحنی AB درنیم کرهٔ بازی قرار داردکه به‌وسیلهٔ این‌صفحه به‌وجود آمده و شامل A و B است.



شکل ۳۲

از برهان خلف استفاده‌می‌کنیم و فرض می‌کنیم، نقطهٔ X از منحنی AB، روی صفحهٔ $\prod$ و یا زیر آن واقع باشد؛ X' را نقطهٔ برخورد AX با $\prod$ می‌گیریم. بنابر نابرابری مثلثی داریم:

$$AX+XB>AX'+X'B$$

اگر A'، قرینهٔ A نسبت به صفحهٔ P باشد، داریم (شکل ۳۲): $A'B=۲$، زیرا A'، O و B بر یك استقامت‌اند. بنابراین

$$AX'+X'B=A'X'+X'B\geqslant A'B=۲$$

تناقض حاصل، حکم مساله را ثابت می‌کند.

در حالت کلی‌تر، می‌توان ثابت کرد که، اگر دو نقطه را روی سطح جسمی انتخاب کنیم که دارای مرکز تقارن باشد وحداقل قطر مرکزی آن برابر ۲ درنظر گرفته شود، و این‌دونقطه را با یك منحنی به‌طول کمتر از ۲ به‌هم وصل کنیم، این منحنی در یکی از نیم‌صفحه‌های بازی قرار می‌گیرد که به وسیلهٔ صفحه‌ای که از مرکز جسم گذشته است، به‌وجود می‌آیند.

مساله‌ای که به‌این مساله مربوط می‌شود، چنین است: هر منحنی بسته به‌طول ۲π در کرهٔ به‌شعاع واحد، دریکی از نیم‌کره‌های بازکره قرار دارد.

۰۷ (۱/۱۹۷۳). دونقطهٔ P و Q در درون چهاروجهی منتظم $ABCD$ واقع‌اند. ثابت کنید: $\widehat{PAQ}<۶۰^\circ$.

حل. بدون این‌که به‌کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که همهٔ یال‌های چهاروجهی $ABCD$ برابر واحد باشند، P و Q در داخل مثلث BCD قرار گیرند و خط راست PQ، خطهای راست BC و CD را،

به‌ترتیب، در R و S قطع کند (شکل ۳۳). بنابراین

$$\widehat{PAQ}<\widehat{RAS}$$

اکنون ثابت می‌کنیم، RS کوتاه‌ترین ضلع‌درمثلث ARS است (که‌از آن‌جا نتیجه می‌شود که زاویهٔ ARS ـ و به طور مسلم زاویهٔ PAQ ـ از ۶۰ درجه کمتر است). درمثلث RSDداریم: $\widehat{RSD}>60^\circ$ و $\widehat{RDS}<60^\circ$. بنابراین $RD>RS$. چون $AR=RD$ (با توجه به‌برابری دومثلث BDRوBAR)، $AR>RS$ و بـه همین ترتیب $AS>RS$. یعنی RS کوتاه‌ترین ضلع مثلث ARS است.

راه‌حل دوم. درمثلث RCS (شکل ۳۴) داریم:

$$RS^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=x^2+y^2+xy$$

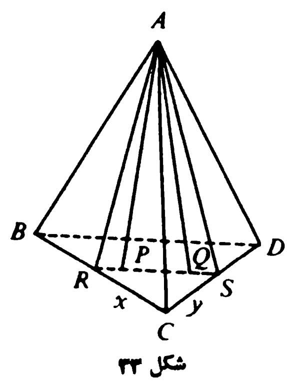
و در مثلث‌های ACR و ACS

$$AR^2=x^2-x+1$$

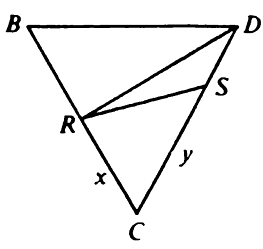
$$AS^2=y^2-y+1$$

که در آن‌ها $0<x<1$ و $0<y<1$. پس $AR>RS$، زیرا

$$AR^2-RS^2=(1-y)(1+y-x)>0$$



شکل ۳۳



شکل ۳۴

به‌همین ترتیب $AS>RS$ و درنتیجه $\widehat{PAQ}<۶۰^\circ$.

□

بـه عنوان تعمیم مساله، ثابت می کنیم، اگر $ABCD$ یـك چهاروجهی دلخواه باشد، به‌نحوی که که هیچ‌کدام از زاویه‌های رأس A منفرجه نباشند، و اگر P و Q دونقطه در داخل یا روی $ABCD$ باشند، آن‌گاه

$$\widehat{PAQ}\leqslant \max\{\widehat{BAC}، \widehat{CAD}، \widehat{DAB}\}$$

اثبات را به طریق برداری می‌دهیم. بردار به مبداء A و انتهای V را $\mathbf{v}$ می‌نامیم. بدون این‌که بـه‌کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد آید، می‌توانیم نقطه‌های P و Q را در داخل یا روی مثلث BCD در نظر بگیریم و فرض کنیم:

$$|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=|\mathbf{d}|=۱$$

در این‌صورت، برای نمایش برداری P و Q می‌توان نوشت:

$$\mathbf{p}=x\mathbf{b}+y\mathbf{c}+z\mathbf{d}، \mathbf{q}=u\mathbf{b}+v\mathbf{c}+w\mathbf{d}$$

که درآن‌ها $x+y+z=۱$، $x، y، z\geqslant ۰$، $u+v+w=۱$، $u، v، w\geqslant ۰$ و $|\mathbf{p}|\leqslant ۱$ و $|\mathbf{q}|\leqslant ۱$.

چون کسینوس در بازهٔ $[۰، \pi]$ نزولـی است، بنابراین، نابرابری ما، هم‌ارز است با

$$\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}\geqslant \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=(x\mathbf{b}+y\mathbf{c}+z\mathbf{d})(u\mathbf{b}+v\mathbf{c}+w\mathbf{d})\geqslant$$
$$\geqslant \min\{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}، \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}، \mathbf{d}\cdot\mathbf{b}\}$$

با انجام ضرب، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=xu+yv+zw+(yu+xv)\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+$$
$$+(zv+yw)\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}+(xw+zu)\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}$$

چون زاویه‌های رأس A منفرجه‌نیستند، بنابراین $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$، $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$ و $\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}$ غیرمنفی‌اند،

در نتیجه

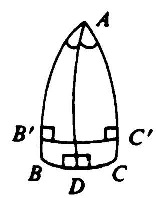
$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \geqslant \{xu+yv+zw+(yu+xv)+(zv+yw)+$$
$$+(xw+zu)\}\cdot\min\{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}, \mathbf{d}\cdot\mathbf{b}\} =$$
$$=(x+y+z)(u+v+w)\min\{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}, \mathbf{d}\cdot\mathbf{b}\} =$$
$$=\min\{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}, \mathbf{d}\cdot\mathbf{b}\}$$

در رابطه با مثلث‌های کروی، نابرابری بالا هم‌ارز با این نتیجه است که بزرگترین کمان از مثلث کروی حاده*، بزرگترین ضلع است. اگر ABC یك مثلث کروی باشد و $\widehat{A}=\widehat{C}=\frac{\pi}{۲}$، آن‌وقت همهٔ کمان‌های مثلث که از نقطهٔ A می‌گذرند، طولی برابر AB و AC دارند. همچنین، اگر

$$AB=AC>\frac{\pi}{۲}>BC$$

آن‌وقت، نیمساز $\widehat{A}$ از AC بزرگتر است (شکل ۳۵ را ببینید). در این‌جا، $AB'=AC'=\frac{\pi}{۲}$ و $\widehat{ABD}=\widehat{ADB}=\frac{\pi}{۲}$.

اگر تنها دو مثلث از وجه‌های بــه رأس A، در چهاروجهی $ABCD$، زاویه‌ای منفرجه در رأس داشته‌باشند، بازهم به‌همان نتیجه می‌رسیم. در این‌جا



شکل ۳۵

---

*) از این استفاده می‌کنیم کــه محیط مثلث کروی حاده، از محیط دایرهٔ عظیمهٔ کره کمتر است.

ترجیح داده‌ایم، ازمثلث کروی متناظر، به‌جای‌چهاروجهی، استفاده کنیم(بخش هندسهٔ فضایی، مساله‌های ۲، ۵ و ۶ را ببینید).

رأس A از چهاروجهی را در مرکز کرهٔ به شعاع واحد قرار می‌دهیم و مثلث‌کروی را درنظر می‌گیریم که از برخورد کره با سه وجه چهاروجهی که از مرکزمی‌گذرند، به‌دست می‌آید. نام گذاری‌های مربوط به‌چهاروجهی را کنار می‌گذاریم و، در این‌جا، سه رأس مثلث را A، B و C، و سه‌ضلع روبه‌رو به‌آن‌ها را a، b و c می‌نامیم.

مثلث کروی ABC را با ضلع‌های a، b و c درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $b, c \leqslant \frac{\pi}{2} < a$. ثابت می‌کنیم که هر کمان از مثلث، از بزرگترین ضلع مثلث، یعنی a، کوچکتر است. از قانون کسینوس‌ها در مثلث کروی استفاده می‌کنیم:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{1}$$

و رابطه‌های دیگر مشابه آن.

دوانتهای P و Q از کمان موردنظررا، روی‌محیط‌مثلث ABC می‌گیریم، به‌نحوی‌که بر یك ضلع واقع نباشند. ابتدا به‌حالتی می‌پردازیم که P روی AC و Q روی AB باشد. $AP = xb$ و $AQ = yc$ می‌گیریم که، در آن‌ها $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ و $PQ = a'$ (شکل ۳۶ را ببینید). داریم:

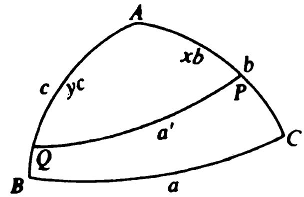
$$\cos a' = \cos xb \cos yc + \sin xb \sin yc \cos A$$

از آن‌جا که

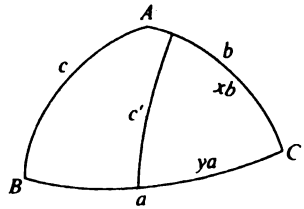
$$\cos a' - \cos a = (\cos xb \cos yc - \cos b \cos c) -$$
$$- \cos A(\sin b \sin c - \sin xb \sin yc) \geqslant 0$$

بنابراین، به‌دست می‌آید: $a' \leqslant a$ (بنا به‌فرض $\cos A \leqslant 0$).

حالتی را درنظر می‌گیریم که یکی از دوانتهای کمان، بر ضلع a واقع باشد. بدون این‌که به‌کلی‌بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، انتهای دیگر کمان را بر b می‌گیریم (شکل ۳۷). در این‌جا داریم:



شکل ۳۶



شکل ۳۷

$$\cos c' = \cos xb \cos ya + \sin xb \sin ya \cos C$$

که در آن $0 \leqslant x \leqslant 1$ و $0 \leqslant y \leqslant 1$. چون

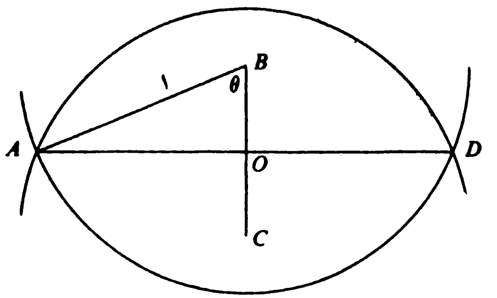
$$\cos c' - \cos a = (\cos xb \cos ya - \cos a) + \sin xb \sin ya \cos C \geqslant 0$$

به‌دست می‌آید $c' < a$ (بنابه فرض $\cos C \leqslant 0$).

۸. (۱۹۸۵/۳). A، B، C و D را چهار نقطه از فضا می‌گیریم. به نحوی که حداکثر یکی از فاصله‌های AB، AC، AD، BC، BD و CD بزرگتر از واحد باشد. حداکثر مقدار مجموع این شش فاصله را پیدا کنید.

حل. AD را فاصله‌ای می‌گیریم که بتواند بزرگتر از واحد باشد. روشن است که، اگر پنج فاصلهٔ دیگر را، با طول‌های ثابت در نظر بگیریم، فاصلهٔ AD وقتی ماکزیمم می‌شود که A و D، دو رأس مقابل از چهارضلعی مسطحهٔ $ABCD$ باشند. وقتی که B و C را ثابت بگیریم، هر دو نقطهٔ A و D، باید در داخل بخش مشترک دایره‌های به‌شعاع واحد و مرکزهای B و C قرار گیرند. این بخش، متقارن است و، بنابراین، بزرگترین وتر باید از نقطهٔ O وسط BC بگذرد. درنتیجه، بزرگترین وتر این بخش، بر وتر مشترک دو دایره منطبق است (شکل ۳۸ را ببینید).

اگر A و D را دو انتهای این وتر مشترک بگیریم، فاصله‌های AD، AB، AC، DB و DC، و به طور هم‌زمان، ماکزیمم می‌شوند و چهار فاصلهٔ آخر باید برابر واحد باشند. بدین ترتیب، مساله منجر به ماکزیمم کردن $AD + BC$ می‌شود. $\widehat{ABO} = \theta$ می‌گیریم؛ و چون $0 \leqslant BC \leqslant 1$، بنابراین $60^\circ \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$.
می‌توان نوشت:



شکل ۳۸

$$AD+BC=۲(\sin\theta+\cos\theta)=۲\sqrt{۲}\sin(\theta+۴۵^\circ)$$

و چون این مقدار، در بازهٔ $۶۰^\circ \leqslant \theta \leqslant ۹۰^\circ$ نزولی است، ماکزیمم آن‌وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $\theta=۶۰^\circ$. به‌این‌ترتیب، ماکزیمم

$$AD+AC+BC+AB+DB+CD$$

برابر است با

$$۲(\sin۶۰^\circ+\cos۶۰^\circ)+۴=۵+\sqrt{۳}$$

۰۹. (۱۹۸۴/۳). P، A، B، C و D، پنج نقطهٔ متمایز از فضا هستند، به‌نحوی که

$$\widehat{APB}=\widehat{BPC}=\widehat{CPD}=\widehat{DPA}=\theta$$

(θ، زاویهٔ حادهٔ مفروضی است). حداکثر و حداقل مقدار $\widehat{APC}+\widehat{BPD}$ را پیدا کنید.

حل. $\alpha=\widehat{APC}$ و $\beta=\widehat{BPD}$ می‌گیریم. روشن است که کمترین مقدار $\alpha+\beta$ برابر صفر است و وقتی به‌دست می‌آید که P و A و C و، همچنین، P و B و D بر یک استقامت باشند.

برای این‌که $\alpha+\beta$ به بیشترین مقدار خود برسد، باید $P-ABCD$ یک کنج محدب تشکیل دهد. کرهٔ بــه شعاع واحد و به مرکــز P را در نظر

می‌گیریم. از برخورد این کره، بـا صفحه‌های APB، PBC و غیره، لوزی کـروی $ABCD$ به‌دست می‌آید. شبیه هندسهٔ مسطحه، قطرهای AC و BD برهم عموداند و در نقطهٔ Q، محل برخورد خـود، یکدیگر را نصف می‌کنند (شکل ۳۹ را ببینید). [این نتیجه‌را می‌توان، مثلاً*، ازهم‌نهشت‌بودن مثلث‌های کـروی BAD و BCD و، سپس، مثلث‌های کـروی ABQ و CBQ و غیره به‌دست آورد.] بنابراین

$$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DA}=\theta،\ \widehat{AC}=\alpha،\ \widehat{BD}=\beta$$

با توجه به قانون کسینوس‌ها در مثلث AQB داریم:

$$\cos\theta=\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\cos\widehat{AQB}=\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}$$

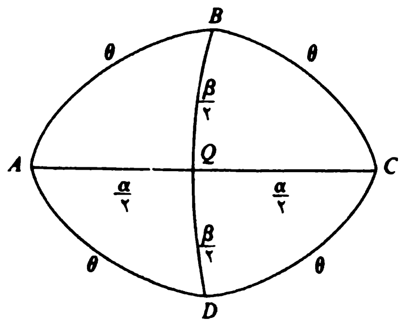
این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}=۲\cos\theta-\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

از آن‌جاکه کسینوس، دربازهٔ $[۰، \pi]$، به‌طور یکنوا نزولی است، بنابراین $\alpha+\beta$ وقتی ماکزیمم می‌شود که داشته باشیم $\alpha=\beta$ و مقدار آن برابر

$$۲\text{arc}\cos(۲\cos\theta-۱)$$

می‌شود. این‌مقدار، متناظر با حالتی است که P رأس و PA، PB، PC و PD



شکل ۳۹

یال‌های هرمی با قاعدهٔ مربعی باشند.

راه‌حل دوم. $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را، بردارهایی به‌طول‌واحد و، به‌ترتیب در امتداد PA، PB، PC و PD می‌گیریم. دراین‌صورت

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}=\cos\theta \qquad (۱)$$

از برابری‌های (۱) به‌دست می‌آید:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{d})=۰ \qquad (۲)$$

و برابری (۲)، تنها وقتی برقرار است‌که $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ برهم عمود باشند و یا دست‌کم، یکی از آن‌ها، برابر صفر باشد. اگر $\mathbf{a}=\mathbf{c}$، آن‌گاه P، A و C بریك استقامت‌اند و $\alpha=۰$؛ و اگر $\mathbf{b}=\mathbf{d}$، آن‌گاه P، B و D روی یك خط راست‌اند و $\beta=۰$. درحالتی α و β هر دو برابر صفر باشند، کمترین مقدار $\alpha+\beta$ به‌دست می‌آید: $\alpha+\beta=۰$ (راه‌حل اول را ببینید). ماکزیمم $\alpha+\beta$ وقتی به‌دست‌می‌آید که، هرچهار بردارمتمایز باشند و $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ بر $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ عمود شود.

با توجه به برابری‌های (۱)، باید برای بردارهای واحد $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ داشته باشیم:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{d})=۰$$

$$(\mathbf{b}+\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{d})=(\mathbf{b}+\mathbf{d})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})=۰$$

و این، به معنای آن است کـه $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}+\mathbf{d}$ بر هردوی $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ عمود‌اند و. بنابراین $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}+\mathbf{d}$ هم‌راستا می‌شوند و

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d})=|\mathbf{a}+\mathbf{c}|\,|\mathbf{b}+\mathbf{d}|$$

ضرب را انجام می‌دهیم، با توجه به (۱) به‌دست می‌آید:

$$۴\cos\theta=۲\sqrt{(۱+\cos\alpha)(۱+\cos\beta)}=۴\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}$$

شبیه راه‌حل اول، استدلال را دنبال می‌کنیم تا حل کامل شود.

۱۰. (۱۹۸۲/۳). اگر A_1 نقطه‌ای در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و A_2 نقطه‌ای در درون مثلث A_1BC باشند. ثابت کنید:

$$I.Q.(A_1BC) > I.Q.(A_2BC)$$

که درآن، منظور از .I.Q، نسبت هم‌پیرامونی شکل است، نسبت هم‌پیرامونی شکل F، به‌این‌صورت تعریف می‌شود:

$$I.Q.(F) = \frac{S_F}{(P_F)^2}$$

(S_F مساحت و P_F محیط شکل F است).

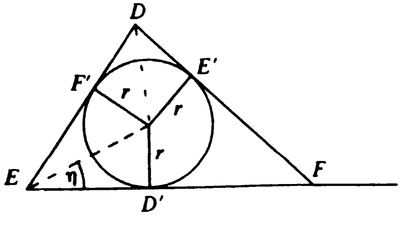
حل. کافی است ثابت کنیم، نسبت هم‌پیرامونی درمثلث DEF، نسبت به‌قاعدهٔ‌مجاور به‌زاویه‌های E و F، باشرط $0 < E < 60^\circ$ و $0 < F < 60^\circ$، تابعی صعودی است (شکل ۴۰).

اگر مساحت مثلث DEF را S و محیط آن‌را P فرض‌کنیم، با توجه به‌شکل ۴۰، داریم: $S = \frac{1}{2} r.P$ بنابراین

$$\frac{1}{2(I.Q.)} = \frac{P}{r} =$$

$$= \frac{DF'}{r} + \frac{F'E}{r} + \frac{ED'}{r} + \frac{D'F}{r} + \frac{FE'}{r} + \frac{E'D}{r} =$$

$$= 2(cotg\eta + cotg\varphi + cotg\delta)$$



شکل ۴۰

که η، φ و δ، نصف‌زاویه‌های مثلث EFD هستند، یعنی $\eta+\varphi+\delta=۹۰^\circ$.
از آن‌جا که

$$cotg\delta=tg(۹۰^\circ-\delta)=tg(\eta+\varphi)$$

به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۴(I.Q.)}=cotg\eta+cotg\varphi+tg(\eta+\varphi)=$$

$$=cotg\eta+cotg\varphi+\frac{cotg\eta+cotg\varphi}{cotg\eta cotg\varphi-۱}$$

فرض می‌کنیم: $cotg\eta=p$ و $cotg\varphi=q$، عبارت $\frac{۱}{۴(I.Q.)}$ به‌صورت تابع زیر درمی‌آید:

$$J(p, q)=p+q+\frac{p+q}{pq-۱}$$

که نسبت به p و q متقارن است. صعودی بودن تابع نسبت به $\widehat{E}$ $(۰<\widehat{E}<۶۰^\circ)$ با فرض ثابت بودن $\widehat{F}$ $(۰<\widehat{F}<۶۰^\circ)$، هم‌ارز است با این‌که، تابع $\frac{۱}{۴(I.Q.)}$ تابعی نزولی از η $(۰<\eta<۳۰^\circ)$ به شرط ثابت بودن φ $(۰<\varphi<۳۰^\circ)$، یا j تابعی‌صعودی نسبت به p $(p>\sqrt{۳})$ به‌شرط ثابت بودن q $(q>\sqrt{۳})$ است.

تابع را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$f(u)=u+\frac{c}{u} \qquad (۱)$$

که درآن، c مقداری است ثابت. از این قضیه (که اثبات، آن‌را، کمی بعدتر آورده‌ایم) استفاده می‌کنیم: تابع (۱)، دربازهٔ $u\geqslant\sqrt{c}$، صعودی است.

دوعدد u و v را دربازهٔ مفروض باشرط $v>u$ انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$f(v)-f(u)=v+\frac{c}{v}-u-\frac{c}{u}=(v-u)\frac{uv-c}{uv}$$

و روشن است که، برای $v \geqslant \sqrt{۳}$ ،u، مثبت است.

اکنون، سعی می‌کنیم J را به‌صورت (۱) درآوریم:

$$p+q+\frac{p+q}{pq-۱}=p+q+\frac{۱}{q}+\frac{۱+\frac{۱}{q^۲}}{p-\frac{۱}{q}}=$$

$$=p-\frac{۱}{q}+\frac{۱+\frac{۱}{q^۲}}{p-\frac{۱}{q}}+q+\frac{۲}{q}$$

که در آن $p-\frac{۱}{q}$ در نقش u و $۱+\frac{۱}{q^۲}$ درنقش ثابت c است. وقتی $q \geqslant \sqrt{۳}$ مقداری ثابت باشد، $q+\frac{۲}{q}$ مقداری ثابت است و دریکنوابودن تابع تأثیری ندارد. بنابراین، J به‌ازای

$$p-\frac{۱}{q} \geqslant \sqrt{۱+\frac{۱}{q^۲}} \text{ یا } p \geqslant \frac{۱}{q}+\sqrt{۱+\frac{۱}{q^۲}}$$

تابعی صعودی است و وقتی $q \geqslant \sqrt{۳}$، سمت‌راست از $\sqrt{۳}$ کوچکتر می‌شود و، بنابراین، دامنهٔ یك‌نوابودن عبارت است از $p \geqslant \sqrt{۳}$. و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یکی از راه‌ها، برای این‌که نزولی‌بودن تابع

$$J=\frac{۱}{۴(I \cdot Q)}=cotg\eta+cotg\varphi+tg(\eta+\varphi)$$

را، برای $\frac{\pi}{۶}>\eta>۰$ ومقدار ثابت φ $(\frac{\pi}{۶}>\varphi>۰)$ ثابت کنیم، این است که

نشان دهیم، مشتق آن برحسب متغیر η، در بازهٔ مفروض، منفی است:

$$J_\eta = -\frac{1}{\sin^2\eta} + \frac{1}{\cos^2(\eta+\varphi)} = -\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\eta)} + \frac{1}{\cos^2(\eta+\varphi)}$$

به‌ازای $\frac{\pi}{6} > \eta > 0$ و $\frac{\pi}{6} > \varphi > 0$ داریم: $\frac{\pi}{2} > \varphi + 2\eta$، یعنی $\eta + \varphi < \frac{\pi}{2} - \eta$،
بنابراین

$$\frac{1}{\cos^2(\eta+\varphi)} < \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\eta)}$$

پس J_η منفی است.

نابرابری‌ها

---

۰۱ (۲/۱۹۷۴). a و b و c عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت‌کنید:

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم، برای x و y مثبت داریم:

$$x^x y^y \geqslant x^y y^x \qquad (1)$$

بدون این‌که بــه کلی‌بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم $x \geqslant y$ (و در مساله اصلی $a \geqslant b \geqslant c$). نابرابری (۱)، با نابرابری $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geqslant 1$ هم‌ارز است ودرستی نابرابری اخیرهم روشن‌است. اکنون، این نابرابری‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$a^a b^b \geqslant a^b b^a ,\ b^b c^c \geqslant b^c c^b ,\ c^c a^a \geqslant c^a a^c$$

از ضرب این نابرابری‌ها در یکدیگر به‌دست می‌آید:

$$(a^a b^b c^c)^۲ \geqslant a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$(a^a b^b c^c)^۳ \geqslant (abc)^{a+b+c}$$

که در واقع، همان‌نابرابری موردنظر است. برابری تنها به‌ازای $a=b=c$ پیش می‌آید.

این مساله را می‌توان تعمیم داد و با همان روش ثابت کرد که به طور کلی، برای عددهای a_i حقیقی و مثبت داریم:

$$(a_۱^{a_۱} a_۲^{a_۲} \cdots a_n^{a_n})^n \geqslant (a_۱ a_۲ \cdots a_n)^{a_۱+a_۲+\cdots+a_n} \qquad (۲)$$

نابرابری (۲) را، به‌کمك نابرابری ین‌سن هم می‌توان ثابت کرد و از آن‌جا به‌دست آورد:

$$\frac{۱}{n}\Sigma \ln a_i^{a_i} \geqslant \ln\left[\frac{۱}{n}\Sigma a_i\right]^{\frac{\Sigma a_i}{n}} \geqslant \ln(\pi a_i)^{\frac{\Sigma a_i}{n^۲}}$$

۴. (۱۹۷۸/۱). a، b، c، d و e عددهایی حقیقی‌اند و می‌دانیم:

$$a+b+c+d+e=۸$$

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+e^۲=۱۶$$

حداکثر مقدار e را پیدا کنید.

حل. با توجه به نابرابری کوشی داریم:

$$۴(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲) \geqslant (a+b+c+d)^۲$$

از آن‌جا که

$$a+b+c+d=۸-e ,\ a^۲+b^۲+c^۲+d^۲=۱۶-e^۲$$

بنابراین

$$۴(۱۶-e^۲)\geqslant(۸-e)^۲ \Rightarrow e(۵e-۱۶)\leqslant ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $۰\leqslant e\leqslant \frac{۱۶}{۵}$. مقدار حداکثر $\frac{۱۶}{۵}$ را می‌توان با قراردادن $a=b=c=d=\frac{۶}{۵}$ پیدا کرد.

تعمیم. با همین روش می‌توانیم، ماکزیمم a_n را پیدا کنیم، به شرطی که داشته باشیم:

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n=K$$
$$a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲=L$$

(a_iها، عددهایی حقیقی‌اند). شبیه راه‌حل بالا، از نابرابری کوشی نتیجه می‌شود که K و L باید در نابرابری $\frac{L}{n}\geqslant\left(\frac{K}{n}\right)^۲$ صدق کنند درحالت‌تساوی $\frac{L}{n}=\left(\frac{K}{n}\right)^۲$ باید همهٔ a_iها باهم برابر باشند.

۳. (۱۹۸۰/۵). ثابت‌کنید، برای عددهای a و b و c از بازهٔ $[۰، ۱]$ داریم.

$$\frac{a}{b+c+۱}+\frac{b}{a+c+۱}+\frac{c}{a+b+۱}(۱-a)(۱-b)(۱-c)\leqslant ۱$$

حل. $F(a، b، c)$ در سمت چپ این نابرابری، نسبت بـه هر یك از متغیرهای a، b و c، تابعی است محدب. دوجمله از این تابع، مثلاً نسبت به a خطی است و دوجملهٔ دیگر به‌صورت $\frac{A}{B+x}$ هستندکه، در آن، $A\geqslant ۰$ و $B>۰$. نمودار تابع $\frac{A}{B+x}$، برای $x>-B$، شاخه‌ای از یـك هذلولی است. محدب بودن تابع را می‌توان، بـه صورت تحلیلی، و بـا استفاده از

نابرابری زیر ثابت کرد:

$$\frac{A}{B+x}+\frac{A}{B+y}\geqslant\frac{۲A}{B+\frac{x+y}{۲}}$$

توجه کنیم که، مشتق دوم تابع $\frac{A}{B+x}(x>-B)$، یعنی $\frac{۲A}{(B+x)^۳}$، همواره مثبت‌است. اکنون، از این‌نکتهٔ مقدماتی، ولی مهم، استفاده‌می‌کنیم که، حداکثر مقدار یك تابع محدب برای یك بازه، درنقطهٔ پایانی این بازه ظاهرمی‌شود. به‌این‌ترتیب، ماکزیمم مقدارتابع $F(a, b, c)$، باید دریکی از ۸ رأس‌مکعب $۰\leqslant a\leqslant ۱$، $۰\leqslant b\leqslant ۱$، $۰\leqslant c\leqslant ۱$، در دستگاه قائم (a,b,c) به‌دست آید؛ و درواقع در هر رأس $F(a, b, c)=۱$.

نابرابری کلی‌تر زیر را هم، می‌توان با روش مشابهی، ثابت کرد:

$$\Sigma\frac{x_i^u}{۱+s-x_i}+\prod(۱-x_i)^v\leqslant ۱ \qquad (۱)$$

که در آن $۰\leqslant x_i\leqslant ۱$، $u\geqslant ۱$، $v\geqslant ۱$ و $x_۱+x_۲+\dots+x_n=s$.

این‌تعمیم، به‌وسیلهٔ آندره ژیرو (Andre Giroux) مطرح شده‌است که، درحالت خاص $u=v=۱$، همان نابرابری مساله ما به‌دست می‌آید.

بدون این‌که، به‌کلی‌بودن‌مطلب، لطمه‌ای‌واردشود، می‌توان فرض‌کرد:

$$۰\leqslant x_۱\leqslant x_۲\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant ۱$$

دراین‌صورت، عبارت سمت چپ نابرابری (۱) (برای $u=v=۱$) کوچکتر یا برابر است با

$$\sum_۱^n\frac{x_i}{۱+s-x_n}+\prod_۱^n(۱-x_i)=$$

$$=۱+(x_n-۱)\left[\frac{۱}{۱+s-x_n}-\prod_۱^{n-۱}(۱-x_i)\right]$$

روشن می‌کنیم کـه جملهٔ دوم، درسمت راست برابری بالا، غیرمثبت است. عامل $۱-x_n$ غیرمثبت است، بنابراین باید نشان دهیم که

$$۱\geqslant(۱+s-x_n)\prod_{۱}^{n-۱}(۱-x_i)$$

داریم:

$$(۱+s-x_n)\prod_{۱}^{n-۱}(۱-x_i)\leqslant\prod_{۱}^{n-۱}(۱+x_i)\prod_{۱}^{n-۱}(۱-x_i)=$$

$$=\prod_{۱}^{n-۱}(۱-x_i^۲)\leqslant ۱$$

۴. (۱۹۷۷/۵). a، b، c، d و e، عددهایی مثبت در محدودهٔ p و q هستند، یعنی دربازهٔ $[p, q]$ واقع‌اند $(p>۰)$ ثابت کنید:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}+\frac{۱}{e}\right)\leqslant$$

$$\leqslant ۲۵+۶\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^۲$$

درچه‌حالتی، علامت برابری برقرار است؟

حل. راه‌حل شبیه مسالهٔ قبل است. عبارت سمت چپ نابرابری، کـه می‌توان آن‌را $F(a, b, c, d, e)$ نامید، نسبت به هرکدام ازمتغیرهای a، b، c، d و e، تابعی است محدب. بنابراین، دریکی از ۳۲ رأس مکعب ۵ بعدی مفروض، بـا شرط $p\leqslant a, b, c, d, e\leqslant q$، به ماکزیمم خود می‌رسد. اگر از ۵ عـدد a، b، c، d و e، n عـدد برابر p و $۵-n$ عدد برابر q داشته باشیم، باید تابع درجه دوم زیر را، نسبت به متغیر n، ماکزیمم‌کنیم:

$$F=(np+(۵-n)q)\left(\frac{n}{p}+\frac{۵-n}{q}\right)=$$

$$=n^۲+(۵-n)^۲+n(۵-n)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)=$$

$$=n^{2}+(5-n)^{2}+2n(5-n)+n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2}=$$

$$=25+n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2}$$

که به‌ازای $n=2$ یا $n=3$ به‌ماکزیمم خود $25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2}$ می‌رسد. بنابراین، برای این‌که به برابری برسیم، باید، از بین عددهای a، b، c، d و e، دو یا سه‌تا برابر p و بقیه برابر q باشند.

تعمیم. این نابرابری را هم می‌توان به‌صورت کلی‌تری درآورد. شبیه مسالهٔ قبل عمل می‌کنیم. برای m متغیر a_i، با شرط $0<p\leqslant a_1, \ldots, a_n\leqslant q$ همیشه داریم:

$$\sum a_i\sum\frac{1}{a_i}\leqslant m^{2}+\left[\frac{m}{2}\right]\left(m-\left[\frac{m}{2}\right]\right)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2}$$

۵. (۲/۱۹۸۰). حداکثر چند تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای متفاوت، می‌توان از دنبالهٔ عددی زیر، که شامل n عدد حقیقی است، انتخاب کرد:

$$a_1<a_2<\cdots<a_n$$

حل. تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای را درنظر می‌گیریم که، جملهٔ وسط آن a_i باشد $(1<i<n)$. وقتی n، عددی فرد باشد $(n=2k+1)$، آن وقت برای جملهٔ وسط a_i، با شرط $1<i\leqslant k$، حداکثر $(i-1)$ امکان برای انتخاب جملهٔ اول وجود دارد: a_1، a_2، ...، a_{i-1}. بنابراین، برای این a_iها، حداکثر می‌توان با

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-1)$$

امکان، تصاعد را برگزید. برای جملهٔ سوم تصاعد، وقتی‌که a_i جملهٔ وسط باشد، با شرط $k<i<n$، حداکثر امکان‌انتخاب $(n-i)$ جمله وجود دارد

a_{i+1}، a_{i+2}، ...، a_n. تعداد چنین تصاعدهایی، حداکثر برابر است با

$$1+2+3+\dots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

در نتیجه، تعداد کل تصاعدهای حسابی سه‌جمله‌ای ممکن، وقتی n عددی فرد باشد، برابر است با

$$\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(k+1)=k^2=\frac{1}{4}(n-1)^2$$

درحالتی هم‌که n، عددی زوج باشد، می‌توان با همین روش استدلال کرد. دراین‌حالت، حداکثر تعدادتصاعدهای حسابی سه‌جمله‌ای برابر است با

$$\frac{1}{4}(n^2-2n)$$

هردو نتیجه را (وقتی‌که n، عددی فرد یا عددی‌زوج باشد)، می‌توان با عبارت $\left[\frac{1}{4}(n-1)^2\right]$ نشان داد کــه درآن، منظور از $[x]$، بزرگترین عدد درستی است‌که از x تجاوز نکند. به‌سادگی روشن می‌شود که، این‌تعداد حداکثر وقتی به‌دست می‌آید که خود عددهای a_1، a_2، ...، a_n، بــه تصاعد حسابی باشند.

۶. (۱۹۷۲/۴). R راعددی‌غیرمنفی‌وگویا می‌گیریم. مجموعهٔ‌عددهای درست a، b، c، d، e و f را طوری پیدا کنید که، برای هرمقدار دلخواه R، داشته باشیم:

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|<|R-\sqrt[3]{2}|$$

حل. بنابر فرض، R عددگویای دلخواهی است و، بنابراین، می‌تواند به‌دلخواه به $\sqrt[3]{2}$ (ازهرطرفی) نزدیک‌شود؛ ولی درهرحالتی، بایدعددگویای

$$f(R)=\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}$$

به‌عدد $\sqrt[3]{۲}$ نزدیك شود.

وقتی R، از بین دو دنبالهٔ عددهای غیرمنفی، به سمت $\sqrt[3]{۲}$ میل کند:

$$R \to \sqrt[3]{۲}$$

سمت راست نابرابری مفروض به‌سمت‌صفر میل می کند. بنابراین، بایدسمت چپ نابرابری، با قراردادن $R=\sqrt[3]{۲}$، برابر صفر شود:

$$a\sqrt[3]{۴}+b\sqrt[3]{۲}+c\equiv ۲d+e\sqrt[3]{۴}+f\sqrt[3]{۲} \qquad (۱)$$

برای این‌که اتحاد (۱) برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$a=e، \ b=f، \ c=۲d$$

که‌اگر درنابرابری مفروض قرار دهیم، عامل‌مشترك $(R-\sqrt[3]{۲})$ پدیدمی‌آید و می‌توان نابرابری را این‌طور نوشت:

$$|aR+b-d\sqrt[3]{۲}(R+\sqrt[3]{۲})|\leqslant|dR^{۲}+aR+b| \qquad (۲)$$

برای این‌که (۲) برقرار باشد، کافی است a، b و d عددهایی درست‌ومثبت باشند و مقدار داخل قدر مطلق، در سمت چپ، مقداری‌مثبت شود. اگرفرض کنیم $a>d\sqrt[3]{۲}$ و $b>d\sqrt[3]{۴}$، می‌توان دوانتخاب سادهٔ زیر را درنظر گرفت:

$$d=۱، \ a=b=۲؛ \ d=۳، \ a=۴، \ b=۵$$

این جواب‌ها، چنان‌اند که، به‌ازای آن‌ها، عبارت‌های

$$f_{۱}(R)=\frac{۲R^{۲}+۲R+۲}{R^{۲}+۲R+۲} \text{ و } f_{۲}(R)=\frac{۴R^{۲}+۵R+۶}{۳R^{۲}+۴R+۵} \qquad (۳)$$

در مقایسه با R، به $\sqrt[3]{۲}$ نزدیك‌ترند.

مثلاً اگر $R_{۰}=\frac{۵}{۴}$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$f_{۱}(R_{۰})=f_{۱}\left(\frac{۵}{۴}\right)=\frac{۱۲۲}{۹۷} \text{ و } |f_{۱}(R_{۰})-\sqrt[3]{۲}|\approx ۰/۰۰۲۱۹$$

و برای انتخاب دوم:

$$f_2(R_0)=f_2\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{296}{235} \text{ و } |f_2(R_0)-\sqrt[3]{2}|\approx 0/000035$$

با همین روش می‌توانیم تقریب‌های گویای خوبی را پیدا کنیم که، نسبت به‌تقریب R، به N^r نزدیکتر باشند (r و N، عددهایی درست‌ومثبت‌اند).

اگر از دستورهای بالا، پشت‌سرهم، استفاده‌کنیم، به دنباله‌ای متقارب از تقریب‌ها می‌رسیم که به‌سمت $\sqrt[3]{2}$ میل می‌کند.

طرح دیگری‌هم، برای پیدا کردن چنین تقریب‌های گویا از عدد $N^{\frac{1}{r}}$ وجود دارد. یکی از این تقریب‌ها، دستور نیوتون، به‌صورت زیر است:

$$R_1=R_0-\frac{R_0^r-N}{rR_0^{r-1}}$$

که درحالت مسالهٔ ما، به‌ازای $N=2$ و $r=3$ و $R_0=\frac{5}{4}$، به‌دست‌می‌آید:

$$R_1=\frac{63}{50} \text{ و } |R_1-\sqrt[3]{2}|\approx 0/000079$$

یادآوری می‌کنیم که، به‌کمك دستور نیوتون، ممکن است دقت تقریب دوم، از دقت تقریب اول، کمتر باشد؛ با وجود این، دنبالهٔ حاصل ازاین تقریب‌ها به سمت $\sqrt[3]{2}$ متقارب است. در دستور (۳)، همیشه در هر تقریب، نسبت به تقریب قبلی، به‌ریشهٔ موردنظر نزدیك‌تر می‌شویم.

۰۷ (۱۹۸۵/ ۲). هرریشهٔ حقیقی معادلهٔ زیر را، تاچهار رقم بعدازممیز محاسبه کنید:

$$x^4-(2\times 10^{10}+1)x^2-x+10^{20}+10^{10}-1=0$$

حل. بنابر قاعدهٔ علامت‌هـای دکارت، تعـداد ریشه‌های مثبت معادله، حداکثر برابر است با ۲. معادله را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\left(x^2-10^{10}-\frac{1}{2}\right)^2=x+\frac{5}{4} \qquad (1)$$

عبارت سمت چپ، همواره نامنفی است، ولـی عبارت سمت راست، برای $x<0$، وقتی نامنفی است که داشته باشیم: $-\frac{5}{4}\leqslant x<0$. در ایـن بازه، عبارت سمت چپ، به تقریب برابر 10^{20} می‌شود، درحالی‌که عبارت سمت راست از $\frac{5}{4}$ کمتر است. به‌این ترتیب، معادله (۱)، ریشهٔ منفی ندارد.

برای پیداکردن ریشه‌های مثبت، ازتقریب‌های‌متوالی استفاده می‌کنیم در برابر x^2 از x و در برابر 10^{10} از $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{4}$ می‌توان گذشت و معادلهٔ (۱) را، به‌این‌صورت نوشت:

$$(x^2-10^{10})^2=0$$

از این‌جا، $x=10^5$، بـه عنوان نخستین تقریب ریشهٔ مثبت به‌دست می‌آید. اکنون، در سمت راست معادلهٔ (۱)، به‌جای x، مقدار 10^5 را قرارمی‌دهیم، ولی باز هم از $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{4}$ صرف‌نظر می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x^2-10^{10})^2=10^5 \Rightarrow x=(10^{10}\pm\sqrt{10^5})^{\frac{1}{2}}$$

که تقریباً برابر است با

$$10^5\pm\frac{\sqrt{10^5}}{2\times 10^5}=10^5\pm\frac{5\sqrt{10}}{10^4}\approx$$

$$\approx 10^5\pm 15/8\times 10^{-4}\approx 10^5\pm 0/0016$$

[دراین‌جا، از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که، برای $a>b$، مقدار عبارت $A=a+\frac{b}{2a}$ از عبارت $B=(a^2+b)^{\frac{1}{2}}$، به‌اندازهٔ $\frac{b^2}{8a^3}$ کمتر است کـه، اگر a نسبت به b خیلی بزرگتر باشد، عدد کوچکی است. در واقع

$$A^2=a^2+b+\frac{b^2}{4a^2},$$

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)=\frac{b^2}{4a^2},$$

$$A-B=\frac{b^2}{4a^2(A+B)}<\frac{b^2}{4a^2(2a)}=\frac{b^2}{8a^3}$$

درمسالهٔ ما $a=10^5$ و $b=10^{\frac{5}{2}}$، بنابراین $A-B<0/125\times10^{-10}$]. روشن می‌کنیم که همین $x=10^5\pm0/0016$، صفرهای تابع

$$f(x)=\left(x^2-10^{10}-\frac{1}{2}\right)^2-x-\frac{5}{4}$$

تا چهار رقم بعد از ممیز ند. محاسبه می‌کنیم:

$$f(10^5\pm0/00155)=$$

$$=\left(\pm310+(0/00155)^2-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-(10^5\pm0/00155)-1/25\times(311)^2-10^5<0;$$

$$f(10^5\pm0/00165)=$$

$$=\left(\pm330+(0/00165)^2-\frac{1}{2}\right)^2-$$

$$-(10^5\pm0/00165)-1/25>330^2-10^5-2>0$$

که راه‌حل را به‌پایان می‌رساند.

راه‌حل دوم. معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x^4-(2a^2+1)x^2-x+a^4+a^2-1=0$$

که در آن، a، در مقایسه با ۱، عدد بسیار بزرگی است. قانون علامت‌های دکارت روشن‌می‌کند که، معادله، حداکثر ۲ ریشهٔ مثبت دارد، معادله را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$P(x)=(x^{2}-a^{2})^{2}-(x^{2}-a^{2})-x-1=0$$

چون $P(a-1)>0$، $P(a)>0$ و $P(a+1)>0$، بنابراین دو ریشهٔ مثبت وجود دارد که، به‌ترتیب، در بازه‌های $(a-1, a)$ و $(a, a+1)$ قرار دارند. اگر $a+e$ را نخستین تقریب ریشهٔ مثبت r فرض کنیم، با قراردادن درمعادله، به‌دست می‌آید:

$$4a^{2}e^{2}-a\approx 0 \Rightarrow e\approx \pm\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

و به‌سادگی قابل تحقیق است که

$$P\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)>0 \text{ و } P\left(1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)<0$$

و

$$P\left(a+\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)<0,\ P\left(a+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)>0$$

بنابراین، دو ریشهٔ مثبت، دراین فاصله‌ها قرار دارند:

$$\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}, a-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right) \text{ و } \left(a+\frac{1}{2\sqrt{a}}, a+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

برای دقت بیشتر می‌نویسیم:

$$r=a+\frac{1}{2\sqrt{a}}+f$$

در معادله قرار می‌دهیم. داریم:

$$4a\sqrt{a}f\mp\sqrt{a}\approx 0 \Rightarrow f\approx\frac{1}{4a}$$

و به‌سادگی تحقیق می‌شود که

$$P\left(a-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4a}\right)<0,\quad P\left(a+\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4a}\right)<0$$

$\varepsilon>0$ را، درمقایسه با ۱، عدد بسیار کوچکی می‌گیریم و بی‌هیچ دردسری تحقیق می‌کنیم که

$$P\left(a-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{(4+\varepsilon)a}\right)>0,$$

$$P\left(a+\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{(4-\varepsilon)a}\right)>0$$

و ریشه‌ها، دراین دو بازه‌اند:

$$\left(a-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{(4+\varepsilon)a},\ a-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4a}\right);$$

$$\left(a+\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4a},\ a+\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{(4-\varepsilon)a}\right)$$

توجه داریم که $3/1^{2}<10<3/2^{2}$. برای $a=10^{5}$ داریم:

$$a-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{(4+\varepsilon)a}>10^{5}-\frac{3/2}{2000},$$

درحالی که

$$a-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4a}<10^{5}-\frac{3/1}{2000}$$

بنابراین، ریشهٔ کوچکتر، تا چهار رقم بعداز ممیز برابر است با

۹۹۹۹۹/۹۹۸۴

به‌همین ترتیب، داریم:

$$a+\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{4a}>10^{5}+\frac{3/1}{2000},$$

$$a+\frac{۱}{۲\sqrt{a}}+\frac{۱}{(۴-\varepsilon)a}<۱۰^{۵}+\frac{۳/۲}{۲۰۰۰}$$

و ریشهٔ بزرگتر با چهار رقم بعداز ممیز، چنین است:

$$۱۰۰۰۰۰/۰۰۱۶$$

برای تکمیل استدلال، نشان‌می‌دهیم که $P(x)=۰$، ریشهٔ منفی ندارد. فرض می‌کنیم $-x=y>۰$. معادله به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(y^{۲}-a^{۲})^{۲}+y-۱=y^{۲}-a^{۲}$$

اگر این معادله ریشه مثبت $y=r$ را داشته‌باشد، روشن است که $r>a$. در نتیجه

$$r^{۲}-a^{۲}>(r^{۲}-a^{۲})^{۲} \text{ و } r^{۲}-a^{۲}>r-۱$$

از این دونابرابری به‌دست می‌آید:

$$۱+a^{۲}>r^{۲} \text{ و } r>\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۴a^{۲}-۳})$$

و این، یك تناقض است، زیرا $۱+a^{۲}<\frac{(۱+\sqrt{۴a^{۲}-۳})^{۲}}{۴}$.

۰۸ (۴/۱۹۷۴). پدر ومادر وپسرتصمیم‌می‌گیرند بایك بازی‌خانوادگی خود را سرگرم کنند. در این بازی «تساوی» وجود ندارد و قانون‌های آن چنین است:

I. بازی‌کن ضعیف‌تر تصمیم می‌گیرد، چه‌کسانی بازی را آغاز کنند؛

II. برندهٔ هر دور بازی، با نفر سومی که در آن شرکت نداشته است، مسابقه می‌دهد؛

III. کسی برنده به‌حساب می‌آید که، برای نخستین‌بار، دو دور بازی را ببرد.

پدر ضعیف‌ترین و پسر قوی‌ترین فرد در این بازی هستند؛ فرض بر این است که احتمال برد هرکس، در هر دور بازی، در جریان تمامی مسابقه تغییر

نکنند. به طور شهودی می‌توان احساس کرد که پدر، باید برای نخستین بار، با همسرش بازی کند تا احتمال بـرد بیشتری داشته باشد. ثابت کنید، این برنامه‌ریزی، در واقع هم، بهترین نوع برای پدر است.

حل. پدر را F، مادر را M و پسر را S می‌گیریم. به‌جز آن نابرابری $W>L$ را به‌معنای پیروزی بازی‌کن W و باخت بازی‌کن L فرض‌می‌کنیم.

اگر F و M نخستین‌بازی را انجام دهند، وقتی F می‌تواند در بازی برنده شود که، یکی از سه موقعیت زیر، در دنبالهٔ بازی‌ها پیش آید:

$$F>M، F>S \qquad (۱)$$

$$F>M، S>F، M>S، F>M \qquad (۲)$$

$$M>F، S>M، F>S، F>M \qquad (۳)$$

(توجه کنیم، حتی‌درحالتی‌که ضعیف‌ترین بازی‌کن، بازی‌را ببرد، بازی بیش از ۴دور طول نمی‌کشد.)

اگر F و S در نخستین دور بازی شرکت‌کنند، دنباله‌های بـرد نظیر حالت قبل است، تنها جای M و S عوض می‌شود.

درحالتی‌که M و S، نخستین بازی را آغاز کنند، F در دو موقعیت زیر برنده می‌شود:

$$S>M، F>S، F>M \qquad (۴)$$

$$M>S، F>M، F>S \qquad (۵)$$

می‌بینیم‌که (۵) همان (۴) است، تنها جای M و S عوض شده است.

$P(W>L)$ (یعنی احتمال برد W از L) را با $\overline{WL}$ نشان می‌دهیم. چون بازی مساوی نداریم، بنابراین $\overline{WL}+\overline{LW}=1$.

اگر F و M، اولین دور را بازی کنند، احتمال این‌که F در مسابقه پیروز شود، برابر است با

$$P_{FM}=\overline{FM}\cdot\overline{FS}+\overline{FM}\cdot\overline{SF}\cdot\overline{MS}\cdot\overline{FM}+\overline{MF}\cdot\overline{SM}\cdot\overline{FS}\cdot\overline{FM}$$

اگر F و S نخستین دور را بازی‌کنند. احتمال برد F درمسابقه چنین

است:

$$P_{FS}=\overline{FS}\cdot\overline{FM}+\overline{FS}\cdot\overline{MF}.\overline{SM}.\overline{FS}+\overline{SF}\cdot\overline{MS}\cdot\overline{FM}\cdot\overline{FS}$$

و اگر M و S بازی اول‌را آغاز کنند، احتمال برد F برابر است با

$$P_{MS}=\overline{SM}\cdot\overline{FS}\cdot\overline{FM}+\overline{MS}.\overline{FM}.\overline{FS}=$$
$$=(\overline{SM}+\overline{MS})\overline{FS}\cdot\overline{FM}=\overline{FS}\cdot\overline{FM}$$

P_{MS} آشکارا از P_{FM} و P_{FS} کمتر است، بنابراین کافی است P_{FM} و P_{FS} را مقایسه کنیم. داریم:

$$P_{FM}-P_{FS}=(\overline{FM}-\overline{FS})(\overline{SF}\cdot\overline{MS}\cdot\overline{FM}+\overline{MF}\cdot\overline{SM}\cdot\overline{FS})$$

و چون S قوی‌ترین بازی‌کن است، $\overline{FM}>\overline{FS}$. بنابراین

$$P_{FM}>P_{FS}$$

۹. (۱۹۷۹/۳). سه‌تاس nوجهی یکسان دراختیارداریم. روی‌وجه‌های متناظر این سه‌تاس، عددهای درست برابری، به‌طور دلخواه نوشته شده‌است. ثابت کنید، اگر این سه‌تاس را به‌تصادف بریزیم، احتمال این‌که، مجموع عددهای روی قاعدهٔ تاس‌ها، بر ۳ بخش‌پذیر باشد، بزرگتر یا برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

حل. می‌توانیم، به‌جای قراردادن عددهای درست‌بر وجه‌های تاس‌ها، باقی‌ماندهٔ آن عددها درتقسیم بر ۳ را بر وجه‌ها قرار دهیم. x و y و z را، به‌ترتیب، احتمال وجود عددهــای ۰، ۱ و ۲ در وجه قاعدهٔ تاس می‌گیریم. در مرحلهٔ اول کوشش می‌کنیم، احتمال P دراین‌باره کــه مجموع عددهای روی قاعده تاس‌ها، مضربی از ۳ باشد، برحسب x و y و z پیدا کنیم. این موقعیت وقتی پیش می‌آید کــه روی قاعده سه‌تاس (۰، ۰، ۰)، (۱، ۱، ۱)، (۲، ۲، ۲) و یا یکی از شش تبدیل (۲، ۱، ۰) پیش‌آید. بنابراین، احتمال موردنظر، برابر است با

$$P=x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}+۶xyz$$

که در آن $x+y+z=۱$ و $x, y, z\geqslant ۰$. اکنون، بــا چند روش ثابت

می‌کنیم: $P \geqslant \frac{۱}{۴}$.

۱) داریم:

$$P=(x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz)+۹xyz=$$
$$=(x+y+z)[(x+y+z)^۲-۳(yz+zx+xy)]+۹xyz=$$
$$=۱-۳(yz+zx+xy)+۹xyz$$

به‌این‌ترتیب، نابرابری $P \geqslant \frac{۱}{۴}$، هم‌ارز است با نابرابری

$$۱+۱۲xyz \geqslant ۴(yz+zx+xy)$$

بدون این‌که به‌کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$x \geqslant y \geqslant z$$

بنابراین $x \geqslant \frac{۱}{۳}$، درنتیجه، نابرابری بالا را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$۱+۴yz(۳x-۱) \geqslant ۴(yz+xy)=۴x(۱-x)$$

و این نابرابری برقرار است، زیر $۰ \leqslant ۱-۳x$ (چون $x \geqslant \frac{۱}{۳}$) و در ضمن از نابرابری روشن

$$۴x(۱-x)-۱=-(۲x-۱)^۲ \leqslant ۰$$

نتیجه می‌شود: $۱ \leqslant (x-۱)۴x$. بنابراین $P \geqslant \frac{۱}{۴}$. علامت برابری تنها وقتی برقرار است که از سه مقدار x و y و z، یکی برابرصفر و دوتای دیگر باهم برابر باشند.

۲) نابرابری $x^۳+y^۳+z^۳+۶xyz \geqslant +\frac{۱}{۴}$ را می‌توان این طور نوشت:

$$۴(x^۳+y^۳+z^۳+۶xyz)\geqslant(x+y+z)^۳$$

(زیرا $x+y+z=۱$)، که بعداز ساده کردن چنین می‌شود:

$$\Sigma x^۳+۶xyz\geqslant\Sigma x^۲y$$

(هر دو مجموع، نسبت به x و y و z متقارن‌انـد). و این، حالت ضعیف‌تری از نابرابری شور (Schur) است که به‌این‌ترتیب، بیان می‌شود:

$$\Sigma x(x-y)(x-z)=\Sigma x^۳+۳xyz-\Sigma x^۲y\geqslant ۰$$

۱۰. (۱۹۸۱/۵). x، عددی حقیقی و n عددی درست و مثبت است. ثابت کنید:

$$[nx]>\frac{[x]}{۱}+\frac{[۲x]}{۲}+\frac{[۳x]}{۳}+\dots+\frac{[nx]}{n}$$

منظور از $[t]$، بزرگترین عدد درست کوچکتر یا برابر t است.

حل. چون برای هـر عـدد درست k، برابری $[k+x]=k+[x]$ برقرار است، کافی است نابرابری را برای $۰<x<۱$ ثابت کنیم. ازطرف دیگر، هردوطرف نابرابری، قطعه به‌قطعه، تابع‌هایی ثابت و صعودی‌اند؛ در سمت راست نـابـرابـری، هـرجملـه، تنهـا در نقطـه‌هـای گـویـای $x=\frac{p}{q}$ $[(p,q)=۱$، $۲\leqslant q\leqslant n$ و $۱\leqslant p\leqslant q-۱]$ صعـودی است.

بنابراین، کافی است درستی نابرابری را، تنها در همین نقطه‌ها ثابت کنیم.

a_k و b_k را، به‌ازای $k=۱, ۲, \dots, n$، عددهای درستی می گیریم که به‌این ترتیب تعریف شده‌اند:

$$kp=a_kq+b_k,\ ۰\leqslant b_k<q$$

دراین‌صورت، نابرابری مفروض، چنین می‌شود:

$$a_n>a_۱+\frac{a_۲}{۲}+\frac{a_۳}{۳}+\dots+\frac{a_n}{n}$$

چون $(p,q)=۱$، عددهای $b_۱$،$b_۲$،...، $b_{q-۱}$، ترتیبی ازعددهای ۱، ۲، ۳،

...، $q-1$، هستند. درواقع، اگر مثلاً* برای b_i و b_j داشته باشیم:

$$b_i \equiv b_j (\mathrm{mod}\ q)،\ ip = a_i q + b_i،\ jp = a_j q + b_j$$

با کم‌کردن دو رابطهٔ اخیر از یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$(i-j)p = mq \quad (m \in \mathbf{Z})$$

بنابراین، $i-j$ باید مضربی از q باشد؛ ولی $q > j$، $i > 0$ و، بنابراین باید داشته باشیم: $i=j$.

با تجدید ترتیب در نابرابری به‌دست می‌آید:

$$b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_{q-1}}{q-1} \geqslant q-1$$

ازآن‌جا

$$a_n + \frac{q-1}{q} \geqslant a_n + \frac{b_n}{q} = \frac{np}{q} =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} + \frac{1}{q}\left(b_1 + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_n}{n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} + \frac{q-1}{q}$$

که درنتیجه، درستی نابرابری موردنظر ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. روشن است که

$$nx = x + \frac{2x}{2} + \frac{3x}{3} + \dots + \frac{nx}{n} \qquad (1)$$

و اگر داشته باشیم:

$$[nx] \geqslant [x] + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \dots + \frac{[nx]}{n}$$

آن‌وقت، باید داشته باشیم:

$$nx-[nx]\leqslant(x-[x])+\frac{۱}{۲}(۲x-[۲x])+\dots+\frac{۱}{n}(nx-[nx])$$

$\{kx\}$ را بخش دهدهی kx، یعنی $kx-[kx]$ می‌گیریم. در نتیجه، با توجه به (۱) باید داشته باشیم:

$$\{nx\}\leqslant\{x\}+\frac{\{۲x\}}{۲}+\frac{\{۳x\}}{۳}+\dots+\frac{\{nx\}}{n}$$

هردو طرف این نابرابری، نسبت به x تابع‌هایی قطعه به قطعه خطی‌اند (با ضریب زاویهٔ برابر n). سمت چپ نابرابری، در نقطه‌های $\frac{۱}{n}$، $\frac{۲}{n}$، $\frac{۳}{n}$، ... ناپیوسته است. بنابراین، اگر نابرابری، برای مقداری از x نادرست باشد، برای هر مضرب بعدی $\frac{۱}{n}$ هم نادرست است. مضرب بعدی را $\frac{k}{n}$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $x=\frac{k}{n}-\varepsilon$ که در آن $\frac{۱}{n}>\varepsilon>۰$. فرض می‌کنیم $d=(n، k)$ و $c=\frac{n}{d}$. در هم‌نهشتی به مدول n، عددهای k، $۲k$، ...، ck، تبدیل‌هایی از ۰، d، $۲d$، ...، $(c-۱)d$ هستند. بنابراین

$$\{x\}+\frac{\{۲x\}}{۲}+\dots+\frac{\{cx\}}{c}\geqslant\frac{d}{n}+\frac{۲d}{۲n}+\dots+\frac{cd}{cn}-c\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\frac{cd}{n}-n\varepsilon=۱-n\varepsilon=\{k-n\varepsilon\}=\{nx\}$$

نظریهٔ ترکیب و نظریهٔ احتمال

۰۱ (۱/۱۹۷۶). الف) فرض کنیم، خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۴،

مثلا شبیه شکل ۴، به رنگ‌های سیاه و سفید درآمده باشند. ثابت کنید، این صفحهٔ شطرنجی، شامل مستطیلی است که درچهارگوشهٔ آن، چهار مربع هم‌رنگ وجود دارد (ضلع‌های مستطیل، روی خط‌های راست قائم و افقی صفحه قرار دارند، شبیه مستطیلی که در شکل ۴ نشان داده شده است.)

ب) ثابت کنید، درمورد صفحهٔ شطرنجی ۶ × ۴، این ویژگی وجودندارد.

حل. الف) نتیجه قوی‌تری را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که، حتی در صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۳ هم، حکم مساله درست است. هر ستون جدول شطرنجی را سیاه می‌نامیم، به‌شرطی که تعدادمربع‌های سیاه، درآن، بیشتراز تعداد مربع‌های سفید باشد؛ در غیر این‌صورت، ستون را سفید می‌نامیم (در هر ستون، سه مربع وجود دارد). چون ۷ ستون وجود دارد، دست‌کم چهار ستون، از یك نوع‌اند و مثلاً سیاه. ثابت می‌کنیم، مستطیلی وجود دارد که چهارمربع چهار گوشهٔ آن، دراین چهارستون قراردارند و همه‌سیاه‌رنگ‌اند. فرض می‌کنیم، در هریك از این چهارستون سیاه، یك مربع سفید وجود داشته باشد. مربع سفید، در هر ستون، تنها می‌تواند یکی از سه موقعیت را اختیارکند، بنابراین از بین چهارستون سیاه، دست‌کم دو ستون، درخانه‌های خود، رنگ‌هایی یکسان دارندکه درستی حکم مساله‌را ثابت می‌کند.

ب) درصفحهٔ شطرنجی ۶ × ۴، به تعداد $C_4^2 = ۶$ ترکیب مختلف، از سیاه و سفید، در هر ستون وجود دارد. این گونه رنگ‌آمیزی در شکل ۴۱

سفید	سفید	سفید	سیاه	سیاه	سیاه
سیاه	سیاه	سفید	سفید	سفید	سیاه
سیاه	سفید	سیاه	سفید	سیاه	سفید
سفید	سیاه	سیاه	سیاه	سفید	سفید

شکل ۴۱

داده شده است. دراین شکل می‌بینیم که نمی‌توان مستطیلی پیدا کرد که، در چهارگوشهٔ آن، چهار مربع یك‌رنگ وجود داشته باشد.

نتیجه‌گیری‌های کلی. نتیجهٔ الف)، برای‌صفحهٔ شطرنجی $n\times 2$، برای صفحهٔ شطرنجی $n\times 3$ (با شرط $n<7$)، برای صفحهٔ شطرنجی $n\times 4$ $(n<7)$ و برای صفحهٔ‌شطرنجی $n\times 5$ $(n<5)$، برقرار نیست. مثلاً برای صفحهٔ شطرنجی $n\times 2$ می‌توان این نمونه را درنظر گرفت:

سیاه سیاه سیاه ...

سفید سفید سفید ...

ولی برای هرصفحهٔ شطرنجی $n\times 5$ (با شرط $n\geqslant 5$) می‌توان نتیجهٔ الف) را به‌دست‌آورد. برای اثبات، کافی است $n=5$ بگیریم. مثل قبل، ستونی را سیاه‌می‌نامیم که تعدادخانه‌های‌سیاه‌آن، بیشتر ازتعداد خانه‌های سفیدباشد؛ درغیر این‌صورت، ستون‌را سفیدمی‌نامیم. چون۵ستون وجود دارد، دست‌کم سه‌ستون از یك‌نوع و مثلاً سیاه‌اند. ثابت می‌کنیم، مستطیلی وجود دارد که راس‌های آن در این سه‌ستون سیاه واقع است و هر چهارمربع گوشه‌های‌آن سیاه‌اند.

دراین سه‌ستون سیاه (که می‌توان آن‌هارا به‌صورت یك‌صفحهٔ‌شطرنجی 5×3 در نظرگرفت)، حداکثر ۶ مربع سفید وجود دارد. فرض‌کنید، یکی از سطرها، تنها شامل مربع‌های سیاه باشد، دراین‌صورت، دست‌کم یك‌سطر دیگر شامل حداقل دو مربع سیاه است و، از آن‌جا، مستطیل مورد نظر به‌دست می‌آید. از طرف دیگر، اگر سطری تنها شامل مربع‌های سیاه باشد، آن‌وقت، هر یك از چهار سطر دیگر، دست‌کم، یك مربع سفید دارند و، بنابراین، باید دوتا از این سطرها رنگی یکسان داشته باشد و مستطیل مورد نظر به‌دست می‌آید.

۰۴ (۵/۱۹۷۸). نه‌ریاضی‌دان، یکدیگر را دریك‌کنفرانس بین‌المللی ملاقات‌می‌کنند. معلوم شد، ازبین هرسه ریاضی‌دان، دست‌کم دونفر، می‌توانند با زبان مشترکی صحبت کنند. اگر هر ریاضی‌دان، حداکثر با سه‌زبان آشنا

باشد، ثابت کنید، دست‌کم، سه‌ریاضی‌دان وجود دارند که می‌توانند با زبانی مشترك صحبت کنند.

حل. اثبات را با برهان‌خلف می‌دهیم. فرض کنید، هیچ‌سه‌ریاضی‌دانی، نتوانند با یك‌زبان مشترك صحبت کنند. درضمن، هر ریاضی‌دان، حداکثر با سه‌نفر می‌تواند صحبت‌کند (زیرا، این‌ریاضی‌دان بیش از سه زبان نمی‌داند و اگر بتواند با چهارنفر صحبت کند، به‌معنای آن است که با دونفر از این چهار نفر با یك زبان صحبت می‌کندکه، با خود او، سه نفر دارای زبانی مشترك می‌شوند). فرض کنیم: ریاضی‌دان M_1 می‌تواند با M_2، M_3 و M_4 صحبت‌کند. دراین‌صورت M_5 می‌تواند حداکثر با سه‌نفر M_2، M_3 و M_4 ویا حداکثر با سه‌نفر از چهارنفر M_6، M_7، M_8 و M_9 صحبت‌کند. به‌این ترتیب، از چهارنفر اخیر، یکی می‌ماند که نمی‌تواند با M_1 یا M_5 صحبت کند. و این، فرض را نقض می‌کند.

این نتیجه‌گیری را، می‌توان به‌ترتیب زیر تعمیم داد:

بزرگترین عـدد درست $N(t, m, p)$ را، با شرط $t \geqslant 1$، $m \geqslant 2$ و $p \geqslant 3$ پیدا کنید، به‌نحوی‌که مجموعه‌ای شامل N نفر باشرط‌های زیر وجود داشته باشد:

I. هرنفر، حداکثر با t زبان صحبت می‌کند؛

II. از بین هر m نفر، دونفر زبان مشترکی دارند؛

III. هیچ p نفری دارای زبان مشترك نیستند.

در مسالهٔ المپیاد، در واقع باید ثابت کنیم $N(3, 3, 3) < 9$؛ و در عمل داریم: $N(3, 3, 3) = 8$.

فرض‌کنید M_1، M_2، M_3 و M_4 طوری باشند که هر دونفر بتوانند تنها با یك زبان با هم صحبت‌کنند. M_5، M_6، M_7 و M_8 را هم، با همان ویژگی درنظر بگیرید. چون، هر ریاضی‌دانی فقط با سه‌زبان صحبت‌می‌کند و هـر زبانی بـه‌وسیلهٔ دو ریاضی‌دان صحبت می‌شود، آن‌وقت، بنابه اصل دیریکله، ازبین هرسه‌ریاضی‌دان، دونفر به‌یك‌مجموعه تعلق‌دارند و می‌توانند با هم ارتباط برقرار کنند.

این نتیجه‌ها را هم می‌توان به‌دست آورد:

$$N(۱، m، p)=(m-۱)(p-۱)،$$

$$N(t، m، ۳)=(m-۱)(t+۱)$$

$$N(۲، m، p)=\begin{cases}\frac{۳}{۲}(m-۱)(p-۱) & (p\equiv ۱(\mathrm{mod}\,۲))\\ \frac{۱}{۲}(m-۱)(۳p-۴) & (p\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۲))\end{cases}$$

$$N(t، m، ۴)=\begin{cases}(m-۱)(۲t+۱) & (t\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۳))\\ ۲(m-۱)t & (t\equiv ۲(\mathrm{mod}\,۳))\end{cases}$$

۰۳ (۱/۱۹۸۲). در یک اجتماع ۱۹۸۲ نفری، در هرگروه ۴ نفری دست‌کم یک نفر وجود داردکه سه‌نفردیگر را می‌شناسد. دست‌کم، چند نفر دراین اجتماع وجود دارند که همهٔ دیگران را می‌شناسند؟

حل. حالت اول. فرض می‌کنیم، بین افراد، رابطهٔ متقارن شناسایی وجود نداشته باشد، یعنی A ممکن است B را بشناسد، در حالی‌که B، A را نمی‌شناسد. دراین حالت، ممکن‌است نتوان‌کسی را پیدا کرد که همهٔ دیگران را بشناسد. فرض‌کنید، همهٔ افراد دور یک میز گرد نشسته باشند وهر فرد همهٔ بقیهٔ افراد را، به‌جز نفر بعداز خود (مثلاً درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) بشناسد. دراین‌صورت، همهٔ شرط‌های مساله برقرار است، بدون این‌که‌کسی پیدا شودکه همه را بشناسد.

حالت دوم. فرض‌می‌کنیم، رابطهٔ شناسایی، دوطرفه و متقارن باشد. $P_۱$ و $P_۲$ را دونفری می‌گیریم که یکدیگر را نمی‌شناسند. در این‌صورت، اگر $P_۳$ و $P_۴$ را متمایز از دونفر اول انتخاب‌کنیم، باید حتماً با هم آشنا باشند، زیرا بنا به فرض، از بین چهارنفر $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$، باید یک‌نفر با سه‌نفر دیگر آشنا باشد. ولی اگر $P_۳$ دراین اجتماع، فرد ناآشنایی داشته باشد، این فرد تنها می‌تواند $P_۱$ یا $P_۲$ باشد. ولی اگر $P_۴$ هم با همه‌آشنا نباشد،

تنها می‌تواند یکی‌از دونفر P_1 یا P_2 را نشناسد؛ دراین‌صورت، دراجتماع چهارنفری P_1، P_2، P_3 و P_4، فرض مساله نقض می‌شود. بنابراین، در این اجتماع بزرگ، حداکثر سه نفر می‌توان پیدا کرد که با همهٔ دیگران آشنا نباشد.

۰۴ (۴/۱۹۸۵). در اجتماعی n نفر وجود دارند. ثابت کنید، دو نفر وجود دارند، به‌نحوی‌که از بین $(n-2)$ نفر بقیه، $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ نفر، یا هر دو نفر را می‌شناسند و یا باهیچ‌کدام ازاین دونفر آشنا نیستند. بین آشنایی‌افراد رابطهٔ متقارن‌وجود دارد، یعنی اگر A با B آشنا باشد، B هم با A آشناست. منظور از $[x]$، بخش‌درست عدد xاست، یعنی بزرگترین‌عدد درست کوچکتراز x.

حل. دونفر را در نظر می‌گیریم. از بین $(n-2)$ نفر بقیه، کسی را درنظر می‌گیریم کــه درست یکی از این دونفر را بشناسد. این‌فرد می‌تواند به دونفر ملحق‌شود وما آن‌رایك «گروه» می‌نامیم. بنابراین، اگرکسی k نفر را دراین اجتماع بشناسد، می‌تواند با $k(n-k)$ زوج، «گروه» تشکیل‌دهد. هرفرد، حداکثرمی‌تواند با $\frac{1}{4}(n-1)^2$ زوج‌تشکیل «گروه» بدهد. بنابراین حداکثر به‌تعداد

$$\frac{1}{4}n(n-1)^2=\frac{1}{2}(n-1)C_n^2$$

«گروه» می‌توان پیدا کــرد. یعنی دست‌کم یکی از C_n^2 زوج، حداکثر بــا $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ نفر از بقیهٔ افــراد، تشکیل «گروه» می‌دهد. بــرای این زوج، دست‌کم به‌تعداد

$$n-2-\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]-1$$

نفر وجود داردکه یا هردونفر زوج‌را می‌شناسند و یا هیچ‌کدام از این‌دونفر را نمی‌شناسند.

۵۰ (۲/۱۹۸۶). درطول یك جلسهٔ سخن‌رانی، هریك از پنج ریاضی‌دان، درست دوبار خواب رفته است. برای هر دو ریاضی‌دان، لحظه‌ای وجود دارد که هردو درخواب بوده‌اند. ثابت کنید، دراین لحظه، سه ریاضی‌دان، هم‌زمان به‌خواب رفته‌اند.

حل. اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم، درهیچ لحظه‌ای سه ریاضی‌دان با هم به‌خواب نرفته‌باشند. $C_5^2 = 10$ فاصلهٔ زمانی‌را درنظر می‌گیریم که برهم منطبق نیستند و، درهرکدام از آن‌ها، لحظه‌ای وجود دارد که دو ریاضی‌دان با هم خوابیده‌اند. این لحظه‌های مشترك دو ریاضی‌دان از زمانی آغاز می‌شود که یکی از ریاضی‌دانان به خواب رفته است. چون هر ریاضی‌دان دوبار بـه‌خواب رفته است، درست ۱۰ لحظهٔ خـواب مشترك دو ریاضی‌دان وجود دارد، به‌نحوی که هرکدام از این لحظه‌ها، در فاصله‌های زمانی‌متفاوت قراردارند. دوریاضی‌دان، به‌ناچار،درطول‌فاصلهٔ اول‌به‌خواب رفته‌اند و، بنابراین، ۸ لحظهٔ خواب مشترك، برای ۹فاصلهٔ دیگر باقی‌می‌ماند که ممکن نیست. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۶۰ (۵/۱۹۷۹). سازمانی nعضودارد. عضوهای این‌سازمان‌در $n+1$ کمیتهٔ سه‌نفری‌شرکت می‌کنند. هیچ‌دوکمیته‌ای دارای عضوهای یکسان نیستند. ثابت کنید، دوکمیته وجود دارد که تنها در یك عضو خود مشترك‌اند.

حل. از بیان مساله روشن می‌شود که $n \geqslant 5$ [برای $n<5$ نمی‌توان $n+1$ کمیتهٔ سه‌نفری تشکیل‌داد، به‌نحوی که هیچ‌دو کمیته‌ای ازنظرعضوهای خود، یکسان نباشند]. اثبات را بـا برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم، هر دوکمیته‌ای را که در نظر بگیریم، یا دوعضو مشترك دارند ویـا اصلاً عضو مشترکی ندارند.

هریك از $n+1$ کمیته سه‌عضو دارد، بنابراین $3n+3$ نفر در آن‌ها شرکت می‌کنند. اگر هریك‌از nنفر، حداکثر، درسه‌کمیته‌.شرکت‌کنند، تعداد عضوهای کمیته‌ها،حداکثر برابر$3n$ می‌شود، بنابراین،فردی‌باید وجود داشته باشد که، دست‌کم، در چهار کمیته شرکت کند. این فرد را A می‌نامیم در چهارکمیتهٔ $\mathcal{E}_1$، $\mathcal{E}_2$، $\mathcal{E}_3$ و$\mathcal{E}_4$ شرکت‌کند. $\{A, B, C\}$ راکمیتهٔ $\mathcal{E}_1$ می‌گیریم.

چون بنابر فرض ما، دو کمیته‌ای که در A مشترک‌اند، باید عضو مشترک دیگری هم‌داشته باشند، بنابراین B یا C باید در ترکیب دو کمیته از کمیته‌های $\mathcal{E}_۲$، $\mathcal{E}_۳$ و $\mathcal{E}_۴$ هم وارد شوند. به‌این ترتیب، می‌توانیم کمیته‌ها را به صورت زیر درنظر بگیریم:

$$\mathcal{E}_۱: A، B، C; \mathcal{E}_۲: A، B، D; \mathcal{E}_۳: A، B، E\ ; \mathcal{E}_۴: A، \ldots$$

[درواقع، اگر کمیتهٔ $\mathcal{E}_۲$ شامل A و B و C باشد، می‌توان کمیتهٔ $\mathcal{E}_۳$ را شامل A و C و D گرفت (تا با هریك از دوکمیتهٔ قبلی دوعضومشترك داشته‌باشد) ولی دراین صورت، نمی‌توانیم برای کمیتهٔ $\mathcal{E}_۴$ عضوهای مناسبی انتخاب کنیم، به‌نحوی که با هریك از سه کمیتهٔ قبلی، دوعضو مشترك داشته باشد. بنابراین ناچاریم برای $\mathcal{E}_۲$ و $\mathcal{E}_۳$، عضو مشترك دوم را یا B بگیریم و یا C. توضیح مترجم].

اکنون به $\mathcal{E}_۴$ می‌پردازیم. این کمیته هم، به‌ناچار، باید شامل عضو B باشد، زیرا درغیراین‌صورت، نمی‌تواند با هرسه کمیتهٔ $\mathcal{E}_۲$، $\mathcal{E}_۳$ و $\mathcal{E}_۴$، دوعضو مشترك داشته باشد. به‌همین‌ترتیب، اگر کمیتهٔ $\mathcal{E}_۵$ هم، شامل A باشد، به‌ناچار شاملB هم خواهدبود. درضمن، باتوجه به‌تقارن، اگر کمیته‌ای‌شامل Bباشد، شامل A هم خواهد بود. این گونه کمیته‌ها را $\mathcal{E}_۱$، $\mathcal{E}_۲$، ...، $\mathcal{E}_k$ می‌نامیم (کمیته‌هایی که شامل A و B هستند). این k کمیته، روی‌هم، $k+۲$ عضو مختلف دارند. $n-k-۲=m$ نفر باقی می‌مانند که باید در $n+۱-k=m+۳$ کمیتهٔ باقی‌مانده شرکت کنند. این کمیته‌ها، عبارتنداز

$$\mathcal{E}_{k+۱}، \mathcal{E}_{k+۲}، \ldots، \mathcal{E}_{n+۱}$$

که در واقع، افراد شرکت‌کننده در آن‌ها، در هیچ‌کدام از کمیته‌های قبلی شرکت ندارند.

به‌این ترتیب، نشان دادیم، اگرگزاره‌ای که باید ثابت شود، برای n نادرست باشد، به‌ازای مقداری مثل $m<n$ هم نادرست است. بنابراین، ناچاریم، درستی‌گزاره را بپذیریم، زیرا درغیراین‌صورت، می‌توانیم خودرا به‌کمترین تعداد افراد برسانیم که گزاره، در مورد آن، نادرست باشد. ولی

دراین‌صورت، بنا به استدلال بالا، باید بازهم تعدادی کمتر از آن‌هم وجود داشته باشد که، به‌ازای آن، گزارهٔ موردنظر نادرست باشد.

۰۷ (۲/۱۹۸۱). هردو ایالت از یك‌کشور، با یکی از سه‌روش‌مسافرتی زیر به‌هم مربوط‌اند: اتوبوس، قطار یا هواپیما. درکشور ازهرسه روش‌مسافرتی استفاده می‌شود؛ در ضمن، هیچ دوایالتی با هرسه وسیله به‌هم مربوط نشده‌اند و، همچنین، هیچ سه ایالتی نمی‌توان پیدا کردکه وسیلهٔ ارتباطی بین هردوتا از آن‌ها، یکسان باشد. این کشور، حداکثر چند ایالت دارد؟

حل. ثـابت می کنیم، حداکثر، ۴ ایالت وجود دارد که، مثلاً A و B با قطار، C و D بـا اتوبوس و بقیهٔ زوج ایالت‌ها با هواپیما به هم مربوط شده‌اند.

ابتدا روشن می‌کنیم کـه، هیچ ایالتی وجود ندارد کـه با یك روش مسافرتی، با سه‌شهر دیگر مربـوط باشد. اثبات را با برهان خلف می‌دهیم: فرض‌کنیم A، با سه‌ایالت B و C و D، به‌وسیلهٔ قطار مربوط باشد، در این صورت، ایالت‌های B و C و D، نمی‌توانند با قطار به هم مربوط باشند و، درضمن، به هر نحوی هم که با اتوبوس یا هواپیما به‌هم وصل شوند، شرط مساله نقض می‌شود. همچنین، از این‌جا نتیجه می‌شودکه‌هر ایالتی بادو وسیله تامین شده است و با هر وسیله به‌یکی از ایالت‌های دیگر مربوط است. این محدودیت‌ها، روشن می‌کندکه، حداکثر تعداد ایالت‌ها، برابر ۵ است.

اکنون‌ثابت می‌کنیم‌که وجود پنج‌ایالت هم، ما را به‌تناقض می‌کشاند.

فرض‌کنید A، با روش M_1 به B و C، و بـا روش M_2 به D و E مربوط باشد، چون دو وسیلهٔ M_1 از C حرکت می‌کند، بدون این‌که به‌کلی‌بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که C و D با روش M_1 به‌هم مربوط‌اند. چون رابطهٔ بین D و E نمی‌تواند M_2 یا M_3 باشد، باید با M_1 به‌هم مربوط باشند. اگر این شیوه بحث را ادامه دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که‌روش M_3 را می‌توان کنار گذاشت که فرض‌مساله‌را نقض‌می‌کند.

۰۸ (۳/۱۹۸۳). هرمجموعه، ازخانوادهٔ زیرمجموعه‌های متناهی یك خط، اجتماعی از دو بازهٔ بسته است. به‌جز این، هـر سه مجموعه از این خانواده،

نقطه‌ای مشترک دارند. ثابت کنید، نقطه‌ای وجود دارد که، دست‌کم، درنصف مجموعه‌های خانواده، مشترک است.

حل. فرض کنید، خانواده با مجموعهٔ $\{F_i: ۱\leqslant i\leqslant n\}$ مشخص شده باشد. اجتماع دوبازهٔ بسته را، همواره می‌توان به‌صورت

$$F_i=[a_i, b_i]\bigcup[c_i, d_i],\ (a_i\leqslant b_i\leqslant c_i\leqslant d_i)$$

نشان داد. فرض کنید

$$a=\max\{a_i: ۱\leqslant i\leqslant n\} \text{ و } d=\min\{d_i: ۱\leqslant i\leqslant n\}$$

اکنون، به‌ازای مقداری از j داریم $a=a_j$ و به‌ازای مقداری از k: $d=d_k$. روشن می‌کنیم که، هر F_i، شامل a_j و d_k است که، از آن‌جا، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. فرض کنید، برعکس، بعضی از F_iها، نه شامل a_j باشند و نه شامل d_k. چون $a_i\leqslant a_j$، و همچنین، چون $d_i\geqslant d_k$: باید داشته باشیم:

$$F_j\bigcap[a_i, b_i]=\phi,\ F_k\bigcap[c_i, d_i]=\phi$$

که از این‌جا نتیجه می‌شود $F_i\bigcap F_j\bigcap F_k=\phi$ که شرط مساله را نقض می‌کند.

۹. (۵/۱۹۸۵). $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... را دنباله‌ای از عددهای درست و مثبت می‌گیریم. برای $m\geqslant ۱$ تعریف می‌کنیم:

$$b_m=\min\{n: a_n\geqslant m\}$$

یعنی b_m عبارت است ازکمترین مقدار n که، به‌ازای آن داشته باشیم: $a_n\geqslant m$.

اگر $a_{۱۹}=۸۵$، بیشترین مقدار این مجموع را پیدا کنید:

$$a_۱+a_۲+\dots+a_{۱۹}+b_۱+b_۲+\dots+b_{۸۵}$$

حل. به‌طور کلی، ثابت می‌کنیم، اگر $a_q=p$، آن‌گاه

$$S_{p,q}\equiv a_۱+a_۲+\dots+a_q+b_۱+b_۲+\dots+b_p=p(q+۱)$$

که در حالت خاص $q=۱۹$ و $p=۸۵$ به‌دست می‌آید: $p(q+۱)=۱۷۰۰$.

اگر به‌ازای همهٔ مقدارهای $۱\leqslant i\leqslant q$ داشته باشیم: $a_i=p$، آن‌وقت، برای همهٔ مقدارهای $۱\leqslant j\leqslant p$ خواهیم داشت: $b_j=۱$ و بنابراین

$$S_{p,q}=qp+p=p(q+1)$$

اکنون فرض می‌کنیم، t بزرگترین اندیسی باشد که، به‌ازای آن $a_t<p$. $a_t=u$ می‌گیریم. اگر a_t به‌اندازهٔ یك‌واحد زیادشود، b_jها تغییری‌نمی‌کنند، به‌جز b_{u+1}، که یك‌واحدکم می‌شود و درنتیجه، مجموع‌مطلوب، ثابت‌می‌ماند. اگر این روند را مرتباً ادامه دهیم، سرانجام، به دنباله‌ای با عددهای برابر می‌رسیم و نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. مستطیلی $p\times q$ می‌سازیم که درهرستون آن $q\times 1$، در هر سطر آن $p\times 1$ و روی‌هم pq مربع داشته‌باشد. درسطر iام، برای هر i، نخستین مربع a_i را سیاه می‌کنیم. در ستون jام، تعداد مربع‌های سفیدی‌که باقی‌مانده‌اند، برابر است با تعداد a_iهایی که از j کوچکترند. پس، این تعداد برابر b_j-1 می‌شود. به‌این‌ترتیب

$$a_1+a_2+\cdots+a_q+(b_1-1)+(b_2-1)+\cdots+(b_p-1)=p\cdot q$$

که ازآن‌جا، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

توجه‌کنیم، درحالت‌خاصی که، برای $1\leqslant i\leqslant k$، داشته‌باشیم: $a_i=1$، دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

۱۵۰. (۱۹۸۴/۴). یك مسابقهٔ دشوار ریاضی در دو بخش I و II و روی‌هم ۲۸ مساله انجام شده است. هر شرکت کننده، روی‌هم، ۷ مساله راحل کرده است. برای هر مساله، دست دو شرکت کننده وجود داردکه هر دو مساله را حل کرده‌اند. ثابت کنید، شرکت‌کننده‌ای وجود دارد که از بخش I یا هیچ مساله‌ای را حل نکرده و یا دست‌کم چهار مساله را حل کرده است.

حل. r را تعداد شرکت‌کنندگانی می‌گیریم که یك مساله را حل‌کرده باشند. این r شرکت‌کننده، بـه تعداد $6r$ مسالهٔ دیگر هـم از بین ۲۷ مسالهٔ باقی‌مانده حل کرده‌اند. ولی بنا به فرض، هر مساله را دو نفر حل کرده‌اند، بنابراین

$$۶r=۲\times ۲۷\Rightarrow r=۹$$

یعنی، هر مساله، بــه وسیلهٔ ۹ شرکت‌کننده حــل شده است. بنابراین، تعداد شرکت‌کنندگان، چنین می‌شود:

$$۹\times \frac{۲۸}{۷}=۳۶$$

اثبات‌حکم مساله‌را، با برهان خلف می‌دهیم و فرض‌می‌کنیم، برعکس، هر شرکت‌کننده‌ای ۱ یا ۲ یا ۳ مساله را در بخش I حل کرده است. تعداد مساله‌های بخش I را n و تعدادکسانی راکه ۱، ۲ یا ۳ مساله از بخش I را حل‌کرده‌اند، به‌ترتیب x، y و z می‌گیریم. بنابراین

$$x+y+z=۳۶ \qquad (۱)$$

و چون هرمساله، به‌وسیلهٔ ۹نفر حل شده است:

$$x+۲y+۳z=۹n \qquad (۲)$$

$n\geqslant ۲$ می‌گیریم و ثابت می‌کنیم:

$$y+۳z=۲C_n^۲ \qquad (۳)$$

برای اثبات رابطهٔ (۳)، به‌هر شرکت‌کننده‌ای که دو مساله از بخش I را حل کرده است، یك«نشان» می‌دهیم. به‌این‌ترتیب، هریك‌ازy شرکت‌کننده (که دو مساله از بخش I راحل‌کرده‌اند) یك «نشان» و به‌هریك از z شرکت‌کننده (که سه مساله از بخش I را حــل کرده‌اند) به‌تعداد $C_۳^۲=۳$ «نشان» تعلق می‌گیرد. درنتیجه، کل «نشان»های اهدایی برابر با $y+۳z$ می‌شود. از طرف دیگر، همین تعداد را از این‌جا می‌توان به‌دست‌آورد که، هر دومساله به وسیلهٔ دونفر حل شده است؛ و چون nمسالهٔ مختلف دربخش I وجود دارد، این تعــداد برابر است $۲C_n^۲$. بــه ایــن ترتیب، برابری (۳) درست است. معادله‌های (۱) و (۲) و(۳) را، به‌ترتیب، در-۳، ۳ و -۲ ضرب‌وسپس با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y=-2n^2+29n-108=-2\left(n-\frac{29}{4}\right)^2-\frac{23}{8}<0$$

و این ممکن نیست. تناقض حاصل نشان می‌دهد که، دست کم یك شرکت کننده وجود دارد که یا هیچ کدام و یا دست کم چهارتا ازمساله‌های بخش I راحل کرده است.

یادداشت. شرط‌های مساله را، از بین عـددهای ۲، ۷، ۹، ۳۶ و ۲۸ تنظیم کرده‌اند. اگر ۲۸ مساله را با علامت‌های ۲۶ حرف الفبای انگلیسی و دو علامت # و * نشان دهیم، طرح زیر نشان می‌دهد کـه مسابقهٔ ریاضی، چگونه انجام گرفته‌است. دراین طرح، ۳۶سطر داریم که نمایندهٔ ۳۶شرکت‌کنندهٔ در مسابقه‌اند. در هرسطر ۷ علامت آمده است که معرف ۷ مساله‌ای است که شرکت کنندهٔ متناظر، حل کرده است.

a b d h r y z	b f j n t v w	d i l p v x *
a b i l n q u	b h l o s t x	d k n o u v z
a c d j t * #	b j k m o q *	e g i j n x y
a c f g o q x	b k p w x y #	e j o p r s u
a e h m n p t	c d n p q s w	e l m q w z #
a e o v w y *	c e f h k l v	f h p q u y *
a f i k r s w	c h j u w x z	f i o p t z #
a g j k l p z	c i k m t u y	f m n r x z *
a m s u v x #	c l n o r y #	g h k n s * #
b c e i s z *	d e k q r t x	g l r t u w *
b c g m p r v	d f j l m s y	g q s t v y z
b d e f g u #	d g h i m o w	h i j q r v #

۱۱. (۱/۱۹۸۳). شش نقطهٔ متمایز A، B، C، D، E و F را بـه تصادف، برمحیط دایرهٔ مفروضی انتخاب کرده‌ایم. چه احتمالی وجود دارد که دو مثلث ABC و DEF جدا ازهم باشند (یعنی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند).

حل. می‌توانیم از انطباق هر مجموعهٔ از نقطه‌ها صرف‌نظر کنیم، زیرا این احتمال‌ها، بنابر یکنواختی توزیع احتمال نسبت به‌طول کمان، برابر صفر است، تعداد ترتیب‌های دایره‌ای (اگر جابه‌جایی‌های دوری آن‌ها را کنار

بگذاریم)، برابر است با $۵! = \frac{۶!}{۶}$ و هرکدام از این تبدیل‌ها، بنابه تقارن توزیع، احتمالی برابر دارند. تعداد ترتیب‌های متفاوت، برای جـدا بودن ABC از DEF، برابر است با $۳! \times ۳!$ که با درنظر گرفتن ترتیب داخلی A و B و C، و مستقل از آن، D و E و F، به‌دست می‌آید. بنابراین،احتمال این‌که ABC وDEF جدا از هم باشند، برابر است با

$$\frac{۳! \times ۳!}{۵!} = \frac{۳}{۱۰}$$

درحالت کلی،وقتی که$m+n$نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n و $B_۱$، $B_۲$، ...، B_m را به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که چندضلعی‌های

$$A_۱A_۲\cdots A_n \text{ و } B_۱B_۲\cdots B_m$$

متمایز از هم باشند، برابر است با $\frac{m!n!}{(m+n-۱)!}$.

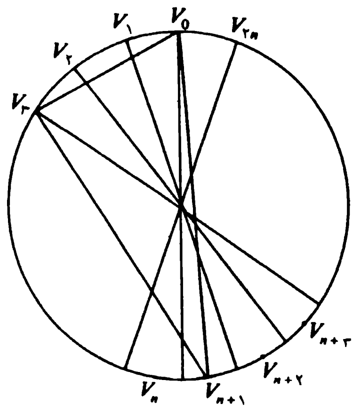
۱۲. (۳/۱۹۷۳). از بیـن رأس‌هـای $(۲n+۱)$ ضلعی منتظمی، به‌تصادف سه‌رأس‌مختلف را انتخاب‌کرده‌ایم. پیش‌آمدهای مربوط به‌انتخاب هرسه‌رأس، ازبین$(۲n+۱)$ رأس را، با احتمال برابرمی‌گیریم: چه‌احتمالی وجود داردکه مرکز$(۲n+۱)$ضلعی، در درون مثلثی با این سه‌رأس قرارگیرد؟

حل. رأس‌های چندضلعی را $V_۰$، $V_۱$، ...، $V_{۲n}$ می‌گیریم. بدون‌این‌که لطمه‌ای به‌کلی بودن مساله بخورد، می‌توان نخستین‌اندیسی را که به‌تصادف انتخاب شده است، $V_۰$ گرفت. دورأس‌دیگر را به $C_{۲n}^{۲}$ طریق ممکن می‌توان انتخاب‌کرد. اکنون، اگریکی‌از این‌دو رأس‌را V_k فرض‌کنیم$(۱ \leqslant k \leqslant n)$، kمثلث ممکن وجود داردکه‌شامل‌مرکز چندضلعی‌باشد (شکل ۴۲ را ببینید).

اگر $k=۳$، آن‌وقت، تنها مثلث‌های ممکن برای $V_۰$ و $V_۳$ که شامل مرکز چندضلعی باشند، عبارتند از مثلث‌های

$$V_۰V_۳V_{n+۱}, V_۰V_۳V_{n+۲}, V_۰V_۳V_{n+۳}$$

بنابراین، تعداد پیش‌آمدهای مساعد برابر است با



شکل ۴۲

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

وچون تعداد پیش‌آمدهای ممکن برابر است با C_{2n}^2، احتمال موردنظر چنین می‌شود:

$$P = \frac{n(n+1)}{2C_{2n}^2} = \frac{n+1}{2(2n-1)}$$

۰۱۳ (۵/۱۹۷۵). یک‌دسته ورق بازی‌را، که شامل n کارت و سه‌تک خال است، به‌خوبی‌مخلوط می‌کنیم (تا آمدن هرکارتی، شانس برابر باآمدن کارت دیگر داشته باشد). سپس کارت‌ها را، از بالا، یکی یکی رو می‌کنیم تا تک‌خال دوم ظاهر شود. ثابت‌کنید، کارت‌هایی که باید رو شود، برابر است با $\frac{n+1}{2}$.

حل. x_1، x_2، x_3 را موقعیت‌های ممکن سه تک‌خال در یک توزیع می‌گیریم. بنابراین، عکس این توزیع (با شمارش از پایین به بالا)، همین احتمال‌راخواهدداشت، یعنی $x_2' = n+1-x_2$. درنتیجه، صرف‌نظر ازاین‌که n زوج باشد یا فرد، میانگین انتظار برابر است با

$$\frac{۱}{۲}[x_۲+(n+۱)-x_۲]=\frac{۱}{۲}(n+۱)$$

با روش مشابهی می‌توان ثابت کرد: اگر r تک‌خال در بین یک‌دستهٔ n کارتی‌وجود داشته باشد و اگر E_j را معرف انتظار آمدن تک‌خال j ام‌بگیریم، آن‌وقت

$$E_j+E_{r+۱-j}=n+۱$$

و به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد:

$$E_j=\frac{j(n+۱)}{r+۱}$$

دریك توزیع تصادفی، فرض‌کنید N_i، معرف تعداد کارت‌هایی باشد کـه بین $(i-۱)$امین و iامین تک‌خال قرار گرفته‌اند ($i=۱، ۲، ...، r$). درضمن، $N_۱$ را به معنای تعداد کارت‌های قبل از تک‌خال اول و $N_{r+۱}$ را به‌معنای تعداد کارت‌های بعد از تـك‌خال آخـر می‌گیریم. N_iها، متغیرهای تصادفی‌اند و، روشن‌است که‌بنا بر تقارن، اگر $(n_۱، n_۲، ...، n_{r+۱})$ رامقدارهای ممکن برای $(N_۱، N_۲، ...، N_{r+۱})$ بگیریم [که درآن‌ها، $۰\leqslant n_k\leqslant n-r$ و $n_۱+n_۲+...+n_{r+۱}=n-r$]، آن وقت، احتمال این مقدارها، با هم برابر است. در نتیجه، مقدار انتظـار $E(N_j)$ از پیش‌آمد N_j، بـرای همهٔ مقدارهای j، یکسان است. چون

$$N_۱+N_۲+...+N_{r+۱}=n-r$$

بنابراین

$$E(N_۱)+E(N_۲)+...+E(N_{r+۱})=n-r$$

و $E(N_j)=\dfrac{n-r}{r+۱}$ و

$$E_۱=E(N_۱)+۱=\frac{n-r}{r+۱}+۱=\frac{n+۱}{r+۱},$$

$$E_۲ = E(N_۱) + ۱ + E(N_۲) + ۱ = \frac{۲(n+۱)}{r+۱}$$

و غیره. سرانجام $E_j = \frac{j(n+۱)}{r+۱}$.

۱۴. (۳/۱۹۷۲). یک انتخاب‌گر، تنها می‌تواند از بین نه‌عدد دهست ۱، ۲، ...، ۹، یک‌عددرا به‌تصادف انتخاب کند؛ احتمال انتخاب هر عدد با احتمال انتخاب هرعدد دیگر، یکی است. احتمال این‌که، بعد از n انتخاب ($n>۱$)، حاصل‌ضرب عددهای انتخابی مضربی از ۱۰ باشد، چقدر است؟

حل. برای این‌که حاصل‌ضرب چند عدد بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، باید دست‌کم یک عامل ۵ و یک عامل زوج دربین آن‌ها وجود داشته باشد. A را پیش‌آمد وجود دست‌کم یک‌عامل ۵ و B را پیش‌آمد وجود دست‌کم یک‌عامل زوج در n انتخاب می‌گیریم. اگر AB، A' و $P(E)$، بـه‌ترتیب، به معنای اشتراک A و B، مکمل A و احتمال پیش‌آمد E باشند، داریم:

$$P(AB) = ۱ - P(A') - P(B') + P(A'B'),$$

$$P(AB) = ۱ - \left(\frac{۸}{۹}\right)^n - \left(\frac{۵}{۹}\right)^n + \left(\frac{۴}{۹}\right)^n$$

پیوست‌ها

۱. سیاههٔ نمادها

$[ABC]$	مساحت مثلث ABC
$\simeq$ یا $\approx$	تقریباً برابر است با
$\cong$	هم‌نهشتی (در هندسه)
$a\equiv b \pmod{p}$	$a-b$ بر p بخش‌پذیر است
$a\not\equiv b \pmod{p}$	$a-b$ بر p بخش‌پذیر نیست
$\equiv$	متحد است با
$[x]$	بخش درست عدد x: بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نکند
$\binom{n}{k}$ یا C_n^k یا $C(n, k)$	ضریب‌دوجمله‌ای، تعدادترکیب‌های k به k از n شیء
(n, k)	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك n و k
$p\mid n$	n بر p بخش‌پذیر است
$p\nmid n$	n بر p بخش‌پذیر نیست
$n!$	فاکتوریل n: $1\times 2\times \cdots \times (n-1)n$؛ $0!=1$،
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	حاصلضرب $a_1 a_2 \ldots a_n$
$\sim$	تشابه (درهندسه)
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	مجموع $a_1+a_2+\cdots+a_n$
$\circ$	$f\circ g(x)=f[g(x)]$ (ترکیب دو تابع)
$K_1\cup K_2$	اجتماع دو مجموعهٔ K_1 و K_2
$K_1\cap K_2$	اشتراك دومجموعهٔ K_1 و K_2
$[a, b]$	بازهٔ بسته، یعنی $a\leqslant x\leqslant b$
(a, b)	بازهٔ باز، یعنی $a<x<b$

۲. برخی از رابطه‌ها و قضیه‌ها

واسطهٔ حسابی(معدل) و واسطهٔ هندسی

اگر a_1، a_2، ...، a_n را n عدد غیرمنفی بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

اگر ω_1، ω_2، ...، ω_n را، عددهایی غیرمنفی با شرط

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$$

درنظر بگیریم، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i a_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{\omega_i}$$

و برابری برای $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ برقرار است.

[برای‌اثبات نابرابری اخیر، که به‌نابرابری واسطه‌های‌وزنی معروف است، از نابرابری ین‌سن (Jensen) برای تابع $f(x) = -\log x$ استفاده کنید.]

ضریب دوجمله‌ای

ضریب y^k در بسط دوجمله‌ای $(1+y)^n$ برابر است با

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = C_n^{n-k}$$

همچنین داریم:

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k$$

قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}y^k$$

که درآن $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times(k-1)k}=C_n^k$.

نابرابری کوشی

برای بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ داریم: $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leqslant|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ و برای عددهای حقیقی x_i و y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$:

$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

x_i و y_i را می‌تـوان مولفه‌های بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ گرفت. برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $x_i=ky_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$، یعنی وقتی کـه بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هم‌راستا باشند.

[اثبات نابرابری را می‌توان با توجـه به‌تعریف حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، یعنی $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و یا با درنظر گرفتن مبین تابع درجه دوم $q(t)=\sum(y_it-x_i)^2$ به‌دست آورد.]

مرکز هندسی مثلث

نقطهٔ برخورد سه‌میانهٔ مثلث را، مرکز هندسی (یا مرکز ثقل) مثلث گویند.

قضیهٔ سه‌وا

اگر AD، BE و CF، سه‌پاره‌خط راست متقارب در درون مثلث ABC باشند، آن‌گاه

$$BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB \qquad (1)$$

و برعکس، اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد. پاره‌خطهای راست AD، BE و CF متقارب‌اند.

قضیهٔ چینی باقی‌مانده‌ها

$m_۱$، $m_۲$، ...، m_n را n عدددرست مثبت می‌گیریم که دوبه‌دو نسبت به‌هم اول‌اند و فرض می‌کنیم $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، معرف n عدد درست باشند؛ در این صورت، هم‌نهشتی‌های $x\equiv a_i(\mathrm{mod}\, m_i)$ $(i=۱، ...، n)$، جواب‌های مشترک دارند، و هر دوجواب، نسبت به مدول $m_۱m_۲...m_n$ هم‌نهشت بایکدیگرند.

مجموعهٔ محدب از نقطه‌ها

مجموعهٔ S شامل نقطه‌ها را محدب گویند، وقتی‌که، برای هر دو نقطهٔ P و Q از S، همهٔ نقطه‌های پاره‌خط راست PQ متعلق به S باشند.

قضیهٔ فرما

اگر p عددی اول باشد، داریم: $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\, p)$، یعنی برای هرعدد اول p، عدد a^p-a بر p بخش‌پذیر است (aعددی است درست و مثبت).

اولر، قضیهٔ فرما را به‌این ترتیب، تعمیم داده است: اگر m وn دوعدد درست و مثبت و نسبت به‌هم اول باشند، آن‌وقت

$$m^{\Phi(n)}\equiv ۱(\mathrm{mod}\, n)$$

که در آن $\Phi(n)$ (تابع اولر) عبارت است از تعداد عددهای درست و مثبت کوچکتر یا برابر n که نسبت به n اول باشند. برای تابع Φ رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد:

$$\Phi(n)=n\prod\left(۱-\frac{۱}{p_j}\right)$$

که درآن p_jها معرف عامل‌های اول عدد n (و غیر از n) هستند.

نابرابری هولدر (Hölder)

a_i و b_i، عددهـایی غیر منفی و p و q عددهـایی مثبت بـا شـرط

$1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ هستند. دراین‌صورت داریم:

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \leqslant$$

$$\leqslant (a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_i=kb_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

نابرابری کوشی حالت خاصی از نابرابری هولدر، به‌ازای $p=q=2$ است.

نابرابری ین‌سن

$f(x)$ را تابعی محدب در بازهٔ I، و w_1، w_2، ...، w_n را عددهایی غیرمنفی می‌گیریم با شرط $w_1+w_2+\cdots+w_n=1$. دراین‌صورت

$$w_1f(x_1)+w_2f(x_2)+\cdots+w_nf(x_n) \geqslant$$

$$\geqslant f(w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n)$$

نابرابری شور (Schur)

برای مقدارهای حقیقی x و y و z و $n\geqslant 0$ داریم:

$$x^n(x-y)(x-z)+y^n(y-z)(y-x)+z^n(z-x)(z-y)\geqslant 0$$

برخی مجموع‌ها

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx=\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2kx=\frac{\sin nx\sin(n+1)x}{\sin x}$$

واسطهٔ توانی

واسطهٔ توانی $P(r)$ به‌این‌ترتیب، تعریف می‌شود:

$$P(r)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right]^{\frac{1}{r}},\ a_i>0,\ r\neq 0,\ |r|<\infty$$

و در حالت‌های خاص داریم:

$$P(r)=\begin{cases}[\prod a_i]^{\frac{1}{n}} & (r=0)\\ \min(a_i) & (r=-\infty)\\ \max(a_i) & (r=\infty)\end{cases}$$

$P(0)$ واسطه‌هندسی، $P(1)$ واسطهٔ حسابی و $P(-1)$ واسطهٔ‌توافقی را به‌دست می‌دهد.

می‌توان ثابت‌کرد که $P(r)$، برای $-\infty\leqslant r\leqslant\infty$، پیوسته است؛ در واقع داریم:

$$\lim_{r\to\infty} P(r)=\max(a_i),\quad \lim_{r\to-\infty} P(r)=\min(a_i)$$

$$\lim_{r\to 0} P(r)=(\prod a_i)^{\frac{1}{n}}$$

برای $-\infty\leqslant r<s\leqslant+\infty$ همیشه داریم:

$$P(r)\leqslant P(s)$$

برابری تنها وقتی برقرار است که همهٔ a_iها برابر باشند.

قضیهٔ منه‌لائوس

اگر D، E و F به‌ترتیب، نقطه‌های واقع بر یک خط راست و بر ضلع‌های BC، CA و AB از مثلث ABC باشند، آن‌گاه

$$BD \cdot CE \cdot AE = -DC \cdot EA \cdot FB \qquad (۱)$$

وبرعکس، اگر D، E و F، به‌ترتیب واقع برسه‌ضلع BC، CA و AB ازمثلث ABC (و یا بر امتداد آن‌ها) طوری باشند که برابری (۱) برقرار باشد، آن‌وقت این سه‌نقطه بر یک استقامت‌اند.

چند رابطه درمثلث کروی

اگر a، b و c ضلع‌ها و A، B و C زاویه‌های یک‌مثلث کروی باشند، داریم:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A،$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a،$$

و غیره (قانون کسینوس‌ها).

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{۲n}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{۲N} = \frac{N}{n}$$

که در آن

$$۲n = \sqrt{۱ - \cos^۲ a - \cos^۲ b - \cos^۲ c + ۲\cos a \cos b \cos c}،$$

$$۲N = \sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}$$

$(۲S = A+B+C)$ و همچنین

$$n = \frac{۲N^۲}{\sin A \sin B \sin C}, \quad N = \frac{۲n^۲}{\sin a \sin b \sin c}$$

چند رابطهٔ مثلثاتی

$$\sin nx = \cos^n x[C_n^1 tgx - C_n^3 tg^3 x + \cdots],$$

$$\cos nx = \cos^n x[1 - C_n^2 tg^2 x + C_n^4 tg^4 x - \cdots],$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z - \sin 2(x+y+z) =$$

$$= 4\sin(y+z)\sin(z+x)\sin(x+y),$$

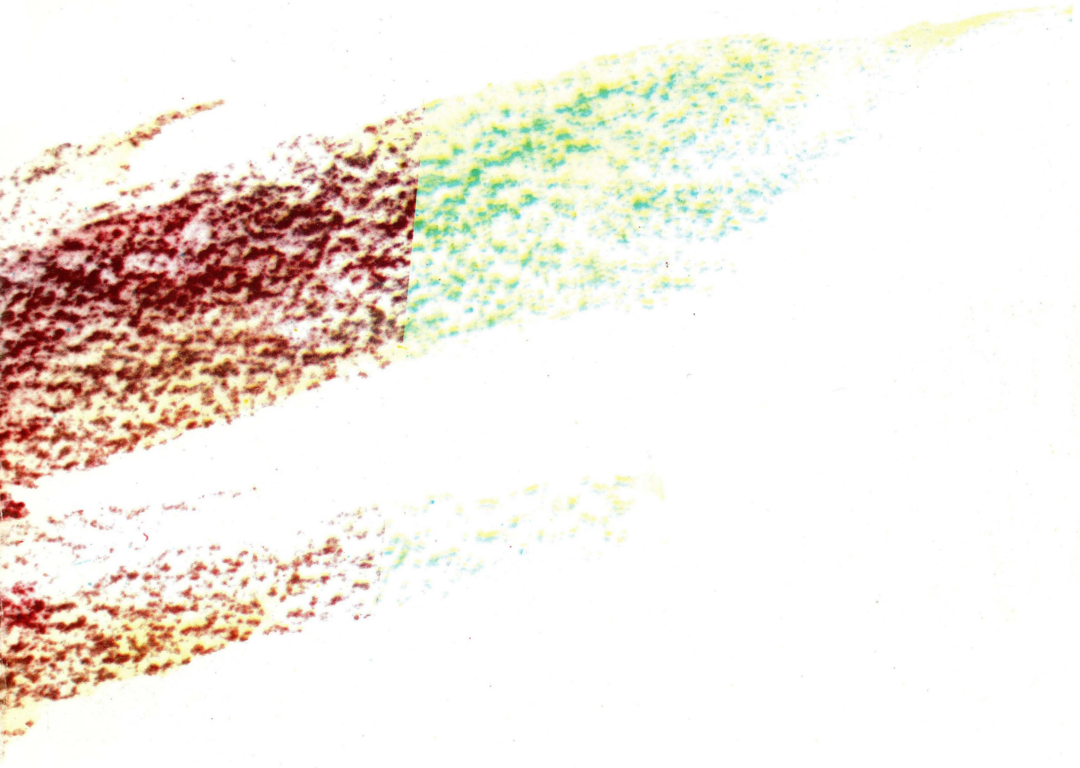
$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2(x+y+z) =$$

$$= 4\cos(y+z)\cos(z+x)\cos(x+y),$$

$$\sin(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z(tgx + tgy + tgz - tgx\,tgy\,tgz),$$

$$\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z(1 - tgy\,tgz - tgz\,tgx - tgx\,tgy)$$

کتابخانه مجازی ریاضیات



انتشارات فردوس